Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ РАСПОЛОЖЕНИИ ВОЗБУЖДАЮЩЕГО ПОЛЕ ДИПОЛЯ ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛОИДА

(Представлено академиком Б. А. Введенским 14 VI 1949)

1. В работе [1] нами получено интегральное уравнение, которое может служить основой для общего и строгого решения задач отражения электромагнитных волн от тонких незамкнутых поверхностей конечной кривизны.

В настоящей статье рассматривается случай применения его к ре-

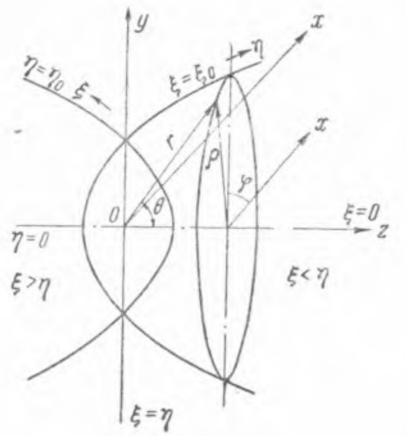

Рис. 1

шению задачи дифракции сферической электромагнитной волны от тонкого параболоида вращения ограниченных размеров.

Введем систему параболических координат, изображенную на рис. 1. Тонкий параболоид вращения расположим так, чтобы фокус его совпал с началом координат. Связь параболических координат ξ и η с прямоугольными координатами x, y, z, с цилиндрическими ρ, φ, z и со сферическими r, ϑ, φ определяется соотношениями:

$$x = 2\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi = \rho\cos\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$y = 2\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi = \rho\sin\varphi = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad (1)$$

$$z = -\xi + \eta = r \cos\vartheta, \tag{1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \xi + \eta = \sqrt{\rho^2 + z^2} = r.$$

Координатные поверхности в принятой системе координат представляют собой систему взаимно ортогональных параболоидов вращения вокруг оси z. Система этих параболоидов конфокальна, имеет начало координат в фокусе и фокальные расстояния ξ и η соответственно. В этой системе координат уравнение параболоида имеет вид $\xi = \xi_0$. Области наружной, по отношению к данному параболоиду, соответствуют значения $\xi > \xi_0$, а внутренней $\xi < \xi_0$. Переменная η на поверхности параболоида меняется в пределах $0 \leqslant \eta < \eta_0'$. Источником сферической волны будем считать электрический диполь, помещенный в фокусе параболоида. Проводимость параболоида принимаем конечной.

Тогда на основании уравнения (17) статьи ([1]) скалярный потенциал $\varphi(r)$ в произвольной точке r пространства, окружающего параболоид вращения, будет определяться выражением:

$$\varphi(r) = \varphi_0(r) + h\varphi_1(r) = \varphi_0(r) + \frac{h\varphi A}{4\pi} \int_S \frac{\exp\left[(|r - r'| + |r' - r_0|)\, ik_a\right]}{|r - r'|\,|r' - r_0|}\, ds. \tag{2}$$

2. Соответственно принятой системе координат, при $z > 0$, $\xi < \eta$ имеем

$$\frac{e^{ik_a r'}}{r'} = 2\pi k \sum_{p=0}^{\infty} S_p(-2ik\xi')\, V_p(2ik\eta'); \tag{3}$$

$$\frac{e^{ik_a |r - r'|}}{|r - r'|} = \frac{i\pi}{2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r'}} J_{n+1/2}(kr')\, H^{(1)}_{n+1/2}(kr)\, P_n(\cos\gamma) \frac{1}{\sqrt{r}} =$$

$$= \frac{i\pi}{2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi' + \eta'}} J_{n+1/2}[(\xi + \eta)k] \frac{1}{\sqrt{\xi + \eta}} H^{(1)}_{n+1/2}[(\xi + \eta)k]\, P_n(\cos\gamma); \tag{4}$$

$$dS = 2\sqrt{\xi'(\xi' + \eta')}\, d\eta'\, d\varphi, \tag{5}$$

где

$$r > r', \quad \xi' = \mathrm{const}, \quad |r - r'| = \sqrt{r^2 + r_1'^2 - 2rr'\cos\gamma},$$

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\vartheta)\, P_n(\cos\vartheta') +$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n - m + 1)}{\Gamma(n + m + 1)} P_n^m(\cos\vartheta')\, P_n^m(\cos\vartheta) \cos m\varphi, \tag{6}$$

$$\cos\vartheta = \frac{-\xi + \eta}{\xi + \eta}, \quad \cos\vartheta' = \frac{-\xi' + \eta'}{\xi' + \eta'}, \quad 0 \leqslant \vartheta < \pi,$$

$$0 \leqslant \vartheta' < \pi, \quad \vartheta + \vartheta' < \pi, \tag{7}$$

φ — действительно; $S_p(z)$ и $V_p(z)$ — специальные функции, связанные с функциями Лагерра первого и второго рода выражениями:

$$S_p(z) = e^{-z/2} L_p(z),$$

$$V_p(z) = e^{-z/2} U_p(z). \tag{8}$$

Подставляя выражения (3) — (7) в (17) статьи ([1]) и производя интегрирование по η и φ соответственно в пределах от 0 до η_0 и от 0 до 2π, получим:

$$\varphi(\xi, \eta) = 2\pi k \varphi \sum_{p=0}^{\infty} S_p(-2ik\xi) V_p(2ik\eta) + \frac{h\varphi A k\pi i}{4}, \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n(\xi' \eta_0') K(n) S_n(2ik\xi) S_n(-2ik\eta),$$

где

$$N_n(\xi' \eta_0') = \frac{D_n \sqrt{\xi'}}{k^{n+1}} V_n(2ik\xi') \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_{n+m+1/2}(\xi' k) \times \right.$$

$$\left. \times [(n+m-1) \eta_0' k J_m(\eta_0' k) S_{n-1, m-1}(\eta_0' k) J_{m-1}(\eta_0' k) S_{n, m}(\eta_0' k)] \right\}, \tag{10}$$

$$K(n) = \frac{\sqrt{2}\, i^{-n-1} (-2ik)^{2n+2} n^2}{2^n \sqrt{\pi}\, k \Gamma(1-n)^2} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!k!}, \tag{11}$$

$S_{\nu, \mu}$ — функции Ломмеля.

Обозначая

$$F_n = \frac{hAi}{8} N_n(\xi' \eta_0') K(n), \tag{12}$$

выражение для $\varphi(\xi, \eta)$ окончательно представим в виде:

$$\varphi(\xi, \eta) = 2\pi k \varphi \sum_{n=0}^{\infty} [S_n(-2ik\xi) V_n(2ik\eta) + F_n S_n(2ik\xi) S_n(-2ik\eta)]. \tag{13}$$

3. Скалярная функция $\varphi(\xi, \eta)$ может быть применена для определения компонент вектора электрического и магнитного полей.

В рассматриваемом нами случае, когда отражающая поверхность обладает круговой симметрией, поле определяется одной компонентой вектора Герца, параллельной оси возбуждающего диполя.

При расположении диполя вдоль оси симметрии поверхности z поле определяется z-компонентой вектора Герца, которая может быть написана в виде: $\vec{\Pi} = \vec{i_z} \Pi(\xi, \eta)$, где $\vec{i_z}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z, а $\Pi(\xi, \eta)$ — скалярная функция, определяемая интегралом выражения (13) по z.

Компоненты электрического и магнитного полей в этом случае определятся выражениями:

$$E_\xi = \sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{-\xi \Pi_\xi + \eta \Pi_\eta}{\xi + \eta} \right) - k^2 \Pi \right\},$$

$$E_\eta = \sqrt{\frac{\eta}{\xi+\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{-\xi \Pi_\xi + \eta \Pi_\eta}{\xi + \eta} \right) + k^2 \Pi \right\}, \tag{14}$$

$$E_\varphi = 0;$$

$$H_\xi = \frac{-i\omega\varepsilon}{2\sqrt{\xi(\xi+\eta)}} \Pi_\varphi,$$

$$H_\eta = \frac{-i\omega\varepsilon}{2\sqrt{\eta(\eta+\xi)}} \Pi_\varphi, \tag{15}$$

$$H_\varphi = i\omega\varepsilon \frac{\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta} (\Pi_\xi + \Pi_\eta).$$

Подставляя $\Pi(\xi, \eta)$ в (14) и (15), получим выражения для компонент электрического и магнитного полей в развернутом виде. Выражения эти, которых мы здесь не приводим, показывают, что компоненты магнитного поля H_ξ и H_η равны нулю. Подобным образом могут быть найдены компоненты электрического и магнитного полей для любого положения диполя относительно оси симметрии параболической поверхности.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность акад. Б. А. Введенскому и чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонову за внимание при выполнении этой работы и просмотр рукописи.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
28 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Г. Мириманов, ДАН, 66, № 4 (1949).