Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 3

ФИЗИКА

Е. В. СТУПОЧЕНКО

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ, ПОРОЖДАЕМЫХ ИСТОЧНИКАМИ В ГАЗОВЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 27 V 1949)

Для статистики ряда физических систем, например реагирующих газов, характерно наличие источников частиц. Эти частицы появляются, обладая некоторой начальной энергией, которая рассеивается при соударениях с окружающими молекулами. Возникает вопрос о стационарных распределениях энергии в системе. Решение, как обычно в кинетических проблемах, зависит от закона взаимодействия частиц и от вида рассеиваемой энергии. Ниже исследуется распределение кинетической энергии частиц, рассеиваемой упругими соударениями.

Пусть в газе B в единице объема в единицу времени появляется N частиц A с кинетической энергией ε_0. Если N и плотность газа не слишком велики, то при исследовании судьбы частиц A можно пренебречь возмущением в максвелловском распределении газа B. В этих условиях „стационарность“ распределения $F(\varepsilon, t)\,d\varepsilon$ частиц A определяется условием

$$\frac{\partial F}{\partial t} = N f^0(\varepsilon), \tag{1}$$

где $f^0(\varepsilon)$ — максвелловское распределение, нормированное к единице. Условие (1) вытекает из того, что частицы A, появившиеся в определенный момент, по истечении достаточно длинного промежутка времени распределяются практически по Максвеллу.

Если $F(\varepsilon, t)$ считать непрерывной, то следует учесть наличие дельтообразной компоненты n_0 частиц A с энергией, точно равной ε_0. Это — частицы, не испытавшие еще ни одного столкновения. В стационарном состоянии $n_0 = N\tau(\varepsilon_0)$, где $\tau(\varepsilon_0)$ — среднее время, протекающее до ближайшего соударения.

Из (1) следует

$$F(\varepsilon, t) = f(\varepsilon) + tNf^0(\varepsilon). \tag{2}$$

При сделанных допущениях кинетическое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial F(\varepsilon, t)}{\partial t} = -\frac{F(\varepsilon, t)}{\tau(\varepsilon)} + \int_0^\infty \frac{F(\varepsilon', t)}{\tau(\varepsilon')} w(\varepsilon', \varepsilon)\, d\varepsilon' + Nw(\varepsilon_0, \varepsilon), \tag{3}$$

где $w(\varepsilon', \varepsilon)\,d\varepsilon$ — вероятность того, что частица A с кинетической энергией ε' после соударения с какой-либо из окружающих молекул, распределенных по Максвеллу, будет обладать энергией в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$.

На основании (2) и стационарности максвелловского распределения получим:

$$\frac{f(\varepsilon)}{\tau(\varepsilon)} = \int_0^\infty \frac{f(\varepsilon')}{\tau(\varepsilon')} w(\varepsilon', \varepsilon)\, d\varepsilon' + N\{w(\varepsilon_0, \varepsilon) - f^0(\varepsilon)\}. \tag{4}$$

Очевидно, что $f(\varepsilon)$ определяется с точностью до аддитивного максвелловского распределения, которое является решением соответствующего однородного уравнения.

Можно показать ортогональность решения союзного однородного уравнения к свободному члену в (4), что доказывает существование решения (4).

В дальнейшем примем, что массы всех частиц, входящих в рассмотрение, одинаковы и равны m. Закон взаимодействия апроксимируем идеальным потенциальным барьером. Найденное в этих предположениях выражение для числа $z(\varepsilon_0, \varepsilon)\, d\varepsilon$ соударений, испытываемых „в единицу времени одной частицей A с энергией ε_0", в результате которых ее энергия оказывается в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$, имеет различный вид в зависимости от того, удовлетворяется ли неравенство $\varepsilon < \varepsilon_0$ или $\varepsilon > \varepsilon_0$:

$$z(\varepsilon_0, \varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{2}\,\pi D^2}{\sqrt{m}} n_B \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}\right) d\varepsilon \qquad (\varepsilon < \varepsilon_0); \tag{5}$$

$$z(\varepsilon_0, \varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{2}\,\pi D^2}{\sqrt{m}} n_B \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} e^{-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{kT}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{kT}}\right) d\varepsilon \qquad (\varepsilon > \varepsilon_0), \tag{5'}$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$; n_B — число частиц в единице объема; D — диаметр частиц.

Вводя

$$z(\varepsilon_0) = \int_0^\infty z(\varepsilon_0, \varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{2}\,\pi D^2}{\sqrt{m}} n_B \left\{\left(\sqrt{\varepsilon_0} + \frac{kT}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\right)\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{kT}}\right) + \sqrt{\frac{kT}{\pi}} e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}\right\}, \tag{6}$$

получим

$$w(\varepsilon_0, \varepsilon) = \frac{z(\varepsilon_0, \varepsilon)}{z(\varepsilon_0)}; \qquad \tau(\varepsilon) = \frac{1}{z(\varepsilon)}. \tag{7}$$

Переходя к переменной $x = \varepsilon / kT$ и придерживаясь системы обозначений, основывающейся на равенствах: $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \varphi(x)\, dx$ — для величин φ с размерностью плотности в пространстве энергии и $z(\varepsilon) = z(x)$ — для „интегральных величин", получим для $u(x) = f(x) / \tau(x)$ уравнение

$$u(x) = \int_0^\infty u(t)\, w(t, x)\, dt + N\{w(x_0, x) - f^0(x)\}. \tag{8}$$

Метод нахождения точного решения уравнения (8) основан на том обстоятельстве, что свойства ядра позволяют построить краевую задачу, эквивалентную этому интегральному уравнению. Разрывные свойства свободного члена и его связь с ядром говорят о том, что предполагаемая краевая задача аналогична задачам о системах со сосредоточенными нагрузками, приводящим к так называемым нагруженным интегральным уравнениям ([1]). Поэтому обычную формулировку теоремы Гильберта ([2]) об эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения следует обобщить дополнительным требованием разрывности решения в точке x_0:

$$u(x_0-0)=u(x_0+0), \quad u'(x_0-0)-u'(x_0+0)=h \quad (h\neq 0). \tag{9}$$

В качестве функции Грина примем выражение

$$K(x,t)=\frac{f^0(t)}{\tau(t)}w(t,x). \tag{10}$$

Оно симметрично относительно x, t в согласии с принципом детального равновесия. Можно показать, что в этом случае дифференциальное уравнение краевой задачи принимает вид

$$pu''+p'u'+(q+g)u+r=0, \tag{11}$$

где

$$\frac{1}{p(x)}+A\frac{f^0(x)}{x}\{e^{-x}+\sqrt{\pi}\sqrt{x}\,\Phi(\sqrt{x})\}, \tag{12}$$

$$q(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{4A}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\{e^{-x}+\sqrt{\pi}\sqrt{x}\,\Phi(\sqrt{x})\}^2}, \tag{13}$$

$$g(x)=\frac{\tau(x)}{f^0(x)}, \tag{14}$$

$$r(x)=-N\left\{q(x)\Phi(\sqrt{x})+\frac{1}{\sqrt{\pi x}}p(x)e^{-x}\right\}, \tag{15}$$

$$A=\frac{\sqrt{2\pi kT}\,D^2 n_B}{\sqrt{m}}, \tag{16}$$

и для величины скачка h:

$$N=p(x_0)\frac{f^0(x_0)}{\tau(x_0)}h. \tag{17}$$

Краевые условия сводятся к требованию обращения решения в нуль. Из физических соображений очевидно, что частным решением соответствующего однородного уравнения должна быть функция $u_1(x)$, определяемая максвелловским распределением

$$u_1(x)=\frac{f^0(x)}{\tau(x)}. \tag{18}$$

Это легко проверяется подстановкой. Отсюда по общим правилам находится общее решение (11). Из него конструируем решение краевой задачи, определяя из краевых условий и (9) произвольные постоянные. Переходя от $u(x)$ к функции распределения, получим

$$f_-(\varepsilon)=\left\{B-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{N}{A}\int\limits_{\varepsilon_0/kT}^{\varepsilon/kT}e^x\frac{d}{dx}\frac{\Phi(\sqrt{x})}{\varphi(x)}dx\right\}f^0(\varepsilon) \qquad (\varepsilon<\varepsilon_0), \tag{19}$$

$$f_+(\varepsilon)=\left\{B+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{N}{A}\int\limits_{\varepsilon_0/kT}^{\varepsilon/kT}e^x\frac{d}{dx}\frac{1-\Phi(\sqrt{x})}{\varphi(x)}dx\right\}f^0(\varepsilon) \quad (\varepsilon>\varepsilon_0), \tag{19'}$$

где

$$\varphi(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\Phi(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\,e^{-x}. \tag{20}$$

Дальнейшее упрощение достигается очевидным интегрированием по частям.

Постоянная B остается произвольной. Можно поставить вопрос о ее наименьшем значении B_0, совместимым с условием $f(\varepsilon) \geqslant 0$. Из полученной таким образом функции распределения $f^*(\varepsilon)$ — назовем ее „функцией возмущения“ или „чистым возмущением“ — уже нельзя было бы выделить набора частиц с максвелловским распределением (данной температуры T).

Практический интерес представляет случай, когда ε_0 велико по сравнению со средней энергией теплового движения. В этих условиях имеем:

$$B_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{N}{A}\int\limits_0^{\varepsilon_0/kT} e^x \frac{d}{dx}\frac{\Phi(\sqrt{x})}{\varphi(x)}\,dx. \tag{21}$$

Выражения (19), (19′) являются точным решением интегрального уравнения (4), справедливым для любых значений ε и ε_0. В практически интересной „далекой“ области энергий — критерием является неравенство $e^{-\varepsilon/kT} \ll 1$ — эти выражения с хорошим приближением принимают вид:

$$f^*_-(\varepsilon) = \left\{B_0 - \frac{N}{2A}\int\limits_{\varepsilon/kT}^{\varepsilon_0/kT} \frac{e^x}{(x + {}^1/_2)^2}\,dx\right\} f^0(\varepsilon), \tag{22}$$

$$f^*_+(\varepsilon) = B_0 f^0(\varepsilon). \tag{22′}$$

Таким образом, в этом приближении функция возмущения в области $\varepsilon > \varepsilon_0$ представляется максвелловским распределением, но с фиктивным „полным числом частиц“, равным B_0. В области $\varepsilon < \varepsilon_0$ максвелловская кривая искажена.

Задача с размытым спектром начальных энергий приводится к интегрированию полученных результатов по ε_0, считая интенсивность источников функцией от ε_0 — $N(\varepsilon_0)\,d\varepsilon_0$.

Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 1922. [2] У. В. Ловитт, Линейные интегральные уравнения, 1933.