Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 4

ГЕОФИЗИКА

Е. П. ФЕДОРОВ

О ВЛИЯНИИ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ ОКЕАНА, ВЫЗЫВАЕМЫХ ДВИЖЕНИЕМ ПОЛЮСОВ ЗЕМЛИ, НА ЭТО ДВИЖЕНИЕ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 VI 1949)

Колебания мгновенной оси вращения в теле земли сопровождаются изменениями потенциала центробежной силы, являющимися причиной некоторых изменений формы поверхности океана. Происходящие при этом перемещения масс воды оказывают в свою очередь обратное влияние на движение мгновенной оси вращения земли, вызывая, как это показал впервые Гюльден ([1]), небольшое увеличение периода ее свободной нутации. Ньюкомб ([2]) сделал первую попытку дать количественную оценку этого увеличения. Более строгая теория, в которой уже отчасти принято во внимание действительное распределенне суши и моря, была предложена в 1915 г. Лармором ([3]).

Этим, собственно говоря, и исчерпывается история вопроса, который мы здесь рассматриваем. Результат Лармора не подвергался ни проверке, ни уточнению; им пользуются в теории движения полюсов по настоящее время.

Мы поставили себе целью рассмотреть совместно влияние колебаний уровня океана и упругих деформаций твердой части земного сфероида и учесть при этом полностью действительное распределение суши и моря на поверхности земли.

Проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции земли мы будем обозначать, как обычно, p, q, r и примем, что при $p=q=0$ поверхность океана является невозмущенной. Тогда, как легко показать, высота над этой поверхностью какой-либо точки $M\ (x, y, z)$ возмущенной поверхности выразится так:

$$h = -\frac{\omega}{g}\left[p\,(zx - h_1) + q\,(yz - h_2)\right], \tag{1}$$

где ω — величина угловой скорости суточного вращения земли, g — ускорение силы тяжести, а h_1, h_2 — две постоянные, которые введены для того, чтобы всегда удовлетворялось очевидное условие:

$$\iint h\,ds = 0. \tag{2}$$

Здесь интегрирование распространяется по всей поверхности моря и ds обозначает элемент этой поверхности.

При выводе соотношения (1) допускается, что прилив, вызываемый изменениями центробежной силы, является статическим. Это допущение вполне законно ввиду значительной величины периодов изменения названной силы (1 и 1,2 года).

Из равенства (2) получаем:

$$S_M h_1 = \iint zx\,ds; \qquad S_M h_2 = \iint yz\,ds, \tag{3}$$

где S_M — полная поверхность океана. Теперь необходимо учесть, что величина h уменьшается за счет упругих деформаций земли. Обозначая символом γ отношение высоты статического прилива на поверхности упругой земли к высоте статического прилива на поверхности земли абсолютно твердой, перепишем равенство (1) в такой форме:

$$h = -\frac{n\gamma}{a\omega}\left[p(zx - h_1) + q(yz - h_2)\right], \tag{4}$$

в котором $n = a\omega^2/g$ и a — средний радиус земли.

Описанная деформация поверхности океана влечет за собой такое перераспределение масс воды, при котором тензор инерции земли в принятой системе осей теряет свою диагональную форму. Легко вычислить, что произведения инерции принимают при этом значения:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= -\iint hyz\,ds = \frac{n}{a\omega}F_0(Fp + F_2 q), \\ I_{zx} &= -\iint hzx\,ds = \frac{n}{a\omega}F_0(F_1 p + Fq), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} F_0 &= \oint z^2 x^2\,ds = \oint y^2 z^2\,ds = \frac{4}{15}\pi a^6, \\ F &= \frac{1}{F_0}\left(\iint xyz^2\,ds - h_1 h_2 S_M\right), \\ F_1 &= \frac{1}{F_0}\left(\iint z^2 x^2\,ds - h_2^1 S_M\right), \\ F_2 &= \frac{1}{F_0}\left(\iint y^2 z^2\,ds - h_2^2 S_M\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим главные моменты инерции земли при $p = q = 0$, как обычно, через A, B, C и будем считать, что $A = B$. Ввиду равенства экваториальных моментов мы можем придать оси OX любое направление в плоскости экватора: проведем эту ось в плоскости меридиана Гринича, а ось OY на 90° восточнее.

Пренебрегая квадратами и произведениями малых величин p, q, I_{xy}, находим следующие значения проекций момента количества движения:

$$l_x = Ap + \frac{\gamma n}{a}F_0(F_1 p + Fq), \quad l_y = Aq + \frac{\gamma n}{a}F_0(Fp + F_2 q), \quad l_z = Cr.$$

Мы можем не принимать во внимание внешних возмущающих сил, как это обычно и делается в теории движения полюсов, и, воспользовавшись тем, что при таком допущении момент количества движения будет вектором постоянным по величине и направлению, получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\left(A + \frac{\gamma n}{a}F_0 F_1\right)\frac{dp}{dt} + \frac{\gamma n}{a}F_0 F\frac{dq}{dt} + \\ &+ \left[(C - A)\omega - \frac{\gamma n\omega}{a}F_0 F_2\right]q - \frac{\gamma n\omega}{a}F_0 F_p = 0, \\ &\left(A + \frac{\gamma n}{a}F_0 F_2\right)\frac{dq}{dt} + \frac{\gamma n}{a}F_0 F\frac{dp}{dt} - \\ &- \left[(C - A)\omega - \frac{\gamma n\omega}{a}F_0 F_1\right]p + \frac{\gamma n\omega}{a}F_0 F_q = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

при выводе которых r всюду заменено через ω.

Введением множителя γ было учтено только косвенное влияние упругости земли. Что касается прямого влияния, то его учет показывает, что при вычислении периода свободной нутации нужно пользоваться не тем значением механического сжатия земли $H = \frac{C-A}{A}$, которое получается непосредственно из данных о прецессии и нутации, а величиной несколько меньшей, названной нами собственным механическим сжатием ([4]). Это то значение H, которое имела бы земля, если бы она была деформирована внешней силой, равной по величине и обратной по знаку центробежной силе, возникающей вследствие суточного вращения.

Таким образом, чтобы учесть прямое влияние упругости земли, мы заменим всюду в предыдущих уравнениях $C-A$ через $(C-A)(1-\nu)$, причем $0 < \nu < 1$.

Теперь, введя обозначения

$$1 + \frac{\gamma n}{aA} F_0 F_1 = a_1, \quad \frac{C-A}{A}(1-\nu) - \frac{\gamma n}{aA} F_0 F_1 = b_1,$$

$$1 + \frac{\gamma n}{aA} F_0 F_2 = a_2, \quad \frac{C-A}{A}(1-\nu) - \frac{\gamma n}{aA} F_0 F_2 = b_2, \quad \frac{\gamma n}{aA} F_0 F = c, \tag{8}$$

получаем

$$\begin{aligned} a_1 \frac{dp}{dt} - c\omega p + c\frac{dq}{dt} + b_2 \omega q = 0, \\ c\frac{dp}{dt} - b_1 \omega p + a_2 \frac{dq}{dt} + c\omega q = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет кратные корни. Поэтому решение можно представить в такой форме:

$$p = P\sin(\alpha t + \beta), \quad q = Q\sin(\alpha t + \beta'), \tag{10}$$

где

$$\alpha = +\sqrt{\frac{b_1 b_2 - c^2}{a_1 a_2 - c^2}}\,\omega, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} P\cos\beta = K a_2 \alpha, \quad P\sin\beta = -Kc\omega, \\ Q\cos\beta' = -Kc\alpha, \quad Q\sin\beta = -Kb_1\omega, \end{aligned} \tag{12}$$

K — произвольная постоянная. На основании формулы (11) период свободной нутации, выраженный в звездных сутках, будет равен

$$T = \sqrt{\frac{a_1 a_2 - c^2}{b_1 b_2 - c^2}}. \tag{13}$$

Переходим к подстановке числовых значений. Имеем: $n = 0,003468$; $\frac{C-A}{A} = 0,003289$; $F_0 = 0,8378\,a^6$; $A = \frac{4}{3}\,0,334\;\pi a^5 d = 7,7184\,a^5$, причем средняя плотность земли $d = 5,517$; $\frac{nF_0}{aA} = 0,0003764$.

Величины h_1, h_2, F, F_1, F_2 были найдены нами путем вычисления кратных интегралов, входящих в выражения (3) и (6), по формулам численного интегрирования.

Так мы получили:

$$\begin{aligned} h_1 = -0,0128\,a^2, \quad h_2 = -0,0241\,a^2, \quad S_M = 8,8646\,a^2, \\ F = -0,00720, \quad F_1 = 0,77775, \quad F_2 = 0,61804, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1 + 0{,}000293\,\gamma, \quad a_2 = 1 + 0{,}000233\,\gamma,\\
&b_1 = 0{,}003289\,(1-\nu) - 0{,}000293\,\gamma,\\
&b_2 = 0{,}003289\,(1-\nu) - 0{,}000233\,\gamma,\\
&c = -0{,}000003.
\end{aligned}
$$

Для земли абсолютно твердой будем иметь:

$$\gamma = 1; \quad \nu = 0; \quad T_0 = 331 \text{ зв. суток.}$$

Заметим, что Лармор для этого случая нашел:

$$T_0 = 326 \text{ зв. суток.}$$

Не останавливаясь на сопоставлении результатов различных исследователей, занимавшихся вычислением действительного периода свободной нутации T по материалам широтных наблюдений, мы в основу дальнейших вычислений положим значение T, которое представляется нам наиболее достоверным, а именно, $T = 433$ зв. суток, и воспользуемся значением γ, полученным Майкельсоном и Галем (5) и З. Н. Аксентьевой (6): $\gamma = 0{,}70$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1{,}000205, \quad a_2 = 1{,}000163\\
&b_1 = 0{,}002288, \quad b_2 = 0{,}002330\\
&\nu = 0{,}242.
\end{aligned}
$$

С этим значением ν, по формуле Лява — Лармора (7)

$$k = \left(\frac{2\varepsilon}{n} - 1\right)\nu$$

находим $k = 0{,}23$.

Этим значением мы и рекомендуем пользоваться при изучении упругих свойств земли.

Теория Лармора приводит к недооценке влияния колебаний уровня океана на удлинение периода свободной нутации. Поэтому Джеффриз (8), пользовавшийся выводами Лармора, получил преувеличенное значение k (0,27).

С помощью формул (12) находим с ошибкой, не превосходящей $5'$,

$$\beta = 0^\circ, \quad \beta' = 90^\circ.$$

Поэтому вместо (10) можно написать:

$$p = K\alpha a_2 \sin \alpha t, \quad q = -Kb_1\,\omega \cos \alpha t.$$

Мы получили уравнение эллипса в параметрической форме. Поскольку отношение полуосей этого эллипса равно $\frac{\alpha a_2}{b_1 \omega} = 1{,}01$, мы заключаем, что влияние рассматриваемых перемещений масс воды при учете действительного распределения суши и моря на поверхности земли не может вызвать заметного отклонения траектории свободного движения полюса от круговой формы.

Поступило
30 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Gyldén, Actes S. R. d'Upsal, 8 (1871). [2] S. Newcomb, M. N. R. A. S., 52, 336 (1892). [3] J. Larmor, Proc. Lond. Math. Soc., 14, ser. 2 (1915). [4] Е. П. Федоров, Тр. Полтавск. гравиметрич. обсерватории АН УССР, 3, 5 (1948). [5] A. A. Michelson and H. G. Gale, Astrophys. Journ., 50, 330 (1919). [6] З. Н. Аксентьева, Тр. Полтавск. гравиметрич. обсерватории АН УССР, 3 (1948). [7] A. E. Love, Proc. Roy. Soc. Lond., ser. A, 82, 73 (1909). [8] H. Jeffreys, The Earth, Cambridge, 1929.