

А. М. ОБУХОВ

ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VI 1949)

В работах А. Н. Колмогорова ^(1, 2), опубликованных в 1941 г., была развита теория локально изотропной турбулентности. Основные результаты этой теории были получены также А. М. Обуховым ⁽³⁾ на основе спектрального представления поля скоростей турбулентного потока и исследования баланса энергии внутри спектра. Более поздние работы Онзагера ⁽⁴⁾ и Гейзенберга ⁽⁵⁾, посвященные этому вопросу, в основном повторяют спектральный метод, предложенный в работе ⁽³⁾.

Изучение локальной структуры турбулентного потока в лабораторной обстановке (аэродинамическая труба) приводит к большим экспериментальным трудностям ⁽⁶⁾. Атмосферная турбулентность с точки зрения изучения локальной структуры является, повидимому, более удобным объектом исследования.

1. Пусть D_{ll} и D_{nn} — продольная и поперечная „структурные функции“ турбулентного потока:

$$D_{ll} = [\overline{v_l(M_2) - v_l(M_1)}]^2, \quad D_{nn} = [\overline{v_n(M_2) - v_n(M_1)}]^2, \quad (1)$$

где M_2 и M_1 — точки наблюдения; v_l — проекция пульсаций скорости на ось M_1M_2 ; v_n — проекция на какую-либо ось, перпендикулярную направлению базы M_1M_2 ; черта означает статистическое осреднение.

В соответствии с гипотезой А. Н. Колмогорова о локальной изотропности турбулентного потока ⁽¹⁾, для достаточно малых расстояний r между точками наблюдения величины D_{ll} и D_{nn} можно считать функциями только расстояния r *.

В работе А. Н. Колмогорова ⁽¹⁾ было введено понятие о внутреннем масштабе турбулентности η , определяемом вязкостью среды ν и средней диссипацией энергии ϵ , и указаны асимптотические разложения структурных функций для расстояний $r \ll \eta$ и $r \gg \eta$. В настоящей работе сделана попытка расчета функций $D_{ll}(r)$ и $D_{nn}(r)$ для всего диапазона значений r , лежащих в области применимости гипотезы о локальной изотропности потока. Полученные результаты сравниваются с измерениями турбулентности в атмосфере.

2. Аналогом известного уравнения Кармана — Хоуэрта в теории локально изотропной турбулентности является уравнение Колмогорова ⁽²⁾:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{4}{r}\right) \left(6\nu \frac{dD_{ll}}{dr} - D_{lll}\right) = 4\epsilon, \quad (2)$$

где $D_{lll} = [\overline{v_l(M_2) - v_l(M_1)}]^3$ — третий момент продольной компоненты

* Расстояние r должно быть мало по сравнению с «внешним масштабом» турбулентности. В турбулентном пограничном слое этот масштаб сравним с расстоянием до стенки.

разности скоростей в двух точках*. Интегрируя уравнение (2) и принимая во внимание, что $D_{III}(0) = 0$ и $\frac{dD_{II}}{dr}(0) = 0$, получаем:

$$6\nu \frac{dD_{II}}{dr} - D_{III} = \frac{4}{5} \varepsilon r. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение асимметрию S статистического распределения продольной компоненты разности скоростей (безразмерная величина):

$$S = \frac{D_{III}}{(D_{II})^{3/2}}. \quad (4)$$

При локально изотропной турбулентности для расстояний $r \gg \eta$, как указал А. Н. Колмогоров (2), естественно предполагать, что асимметрия S не зависит от расстояния r . Из теории следует, что S имеет отрицательный знак ($S = -|S|$). В настоящее время имеются непосредственные измерения значений S для различных расстояний, проведенные Таунсендом (6) в аэродинамической трубе, подтверждающие теорию Колмогорова. Измерения Таунсенда показали также, что асимметрию S можно считать с достаточной степенью точности постоянной не только при $r \gg \eta$, но и для всех значений r , лежащих в области применимости гипотезы локальной изотропности потока**.

Предположение о постоянстве асимметрии ($S = S_1 = \text{const}$) позволяет определить структурную функцию $D_{II}(r)$ из уравнения Колмогорова, которое мы можем теперь записать в следующей форме:

$$6\nu \frac{dD_{II}}{dr} + |S_1| (D_{II})^{3/2} = \frac{4}{5} \varepsilon r. \quad (5)$$

Введем локальный масштаб турбулентности η_1 и характерную скорость w_1 :

$$\eta_1 = k_1 \sqrt[4]{\nu^3 / \varepsilon}, \quad w_1 = k_2 \sqrt[4]{\nu \varepsilon} \quad (6)$$

и будем рассматривать безразмерные величины:

$$\rho = r / \eta_1, \quad \beta_{II} = D_{II} / w_1^2, \quad \beta_{nn} = D_{nn} / w_1^2. \quad (7)$$

Числовые постоянные k_1 и k_2 определим так, чтобы уравнение (5), преобразованное к безразмерным величинам β_{II} , ρ , приняло вид:

$$\frac{d\beta_{II}}{d\rho} + \left(\frac{4}{3} \beta_{II}\right)^{3/2} = \rho. \quad (8)$$

При этом условии коэффициенты k_1 и k_2 связаны уравнениями

$$\frac{|S_1| k_1 k_2}{6} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}, \quad \frac{2}{15} \frac{k_1^2}{k_2^2} = 1,$$

откуда следует, что

$$\eta_1 = \frac{5.035}{\sqrt{|S_1|}} \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\varepsilon}}, \quad w_1 = \frac{1.838}{\sqrt{|S_1|}} \sqrt[4]{\nu \varepsilon}. \quad (6a)$$

Безразмерная структурная функция $\beta_{nn}(\rho)$ при турбулентности

* Напомним, что положительный знак продольной компоненты разности скоростей соответствует удалению частиц жидкости, находящихся в точках M_1 и M_2 , отрицательный знак — сближению.

** Экспериментально определенные значения S колеблются в пределах от -0.36 до -0.42 . В качестве наиболее вероятного значения, по Таунсенду, можно принять -0.38 . Некоторый разброс точек находится в пределах точности измерений.

в несжимаемой среде связана с продольной функцией $\beta_{II}(\rho)$ известным уравнением, вытекающим из уравнения неразрывности:

$$\beta_{nn} = \beta_{II} + \frac{\rho}{2} \frac{d\beta_{II}}{d\rho}. \quad (9)$$

Нами было выполнено численное интегрирование уравнения (8). Определенные таким способом функции $\beta_{II}(\rho)$ и $\beta_{nn}(\rho)$ представлены кривыми на рис. 1*. Пунктиром показаны асимптотические представле-

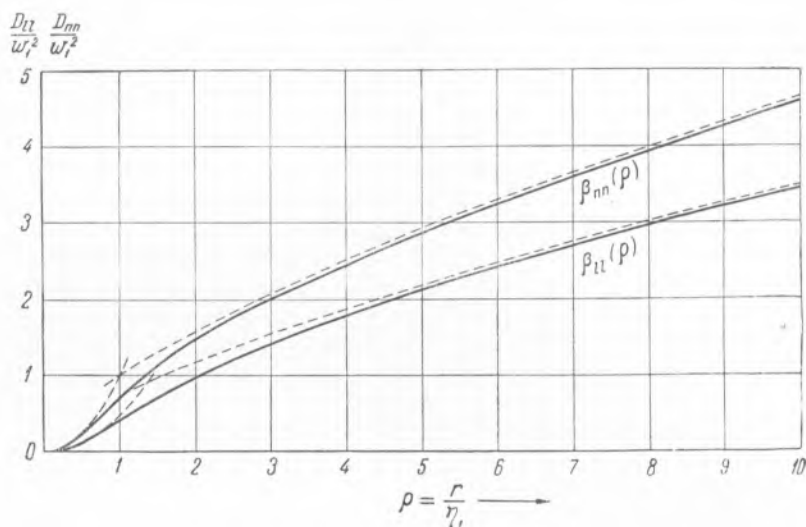


Рис. 1

ния структурных функций соответственно при малых и больших значениях ρ , указанные еще в 1941 г. А. Н. Колмогоровым (1). В наших обозначениях:

$$\beta_{II}(\rho) \approx \frac{1}{2}\rho^2 \quad \text{при } \rho \ll 1; \quad \beta_{II}(\rho) \approx \frac{3}{4}\rho^{3/2} \quad \text{при } \rho \gg 1; \quad (10)$$

$$\beta_{nn}(\rho) \approx \rho^2 \quad \text{при } \rho \ll 1; \quad \beta_{nn}(\rho) \approx \rho^{3/2} \quad \text{при } \rho \gg 1. \quad (11)$$

Специальный выбор численных коэффициентов k_1 и k_2 в определении характерных масштабов (6) и (7) дает возможность удобного определения η_1 и ω_1 по найденной из эксперимента поперечной структурной функции $D_{nn}(r)$ **.

3. Посредством дифференциального термоанемометра с усилителем Гёдеке (7) измерял средние абсолютные значения разности скоростей в направлении, перпендикулярном базе (соответствует поперечной структурной функции). Расстояние r между приемниками менялось в пределах от 0,1 до 80 см. Наблюдения производились на высоте 1,15 м над поверхностью луга (аэродром). Приведенные в работе (7) данные были подвергнуты следующей обработке:

а) Экстраполяцией экспериментальной кривой на расстояние $r = 0$ была определена „случайная погрешность“ измерительной аппаратуры Δv_0 , оказавшаяся равной 0,74 см/сек.

б) Измеренные значения Δv были исправлены по формуле

* В диссертации автора (9) приведены таблицы значений $\beta_{II}(\rho)$ и $\beta_{nn}(\rho)$.

** Аппроксимируя $D_{nn}(r)$ при малых значениях r параболой, а при больших значениях r законом $r^{2/3}$, мы определим η_1 и ω_1^2 как координаты точки смыкания соответствующих представлений при малых и больших значениях r . Это построение удобно выполнять в логарифмическом масштабе.

$$\Delta v' = \sqrt{\Delta v^2 - \Delta v_0^2}$$

в) Исправленные значения $\Delta v'$ умножались на коэффициент $\sqrt{\pi/2}$ для получения „средне-квадратичного“ значения поперечной разности скоростей $\sigma_n = \sqrt{D_{nn}}$.

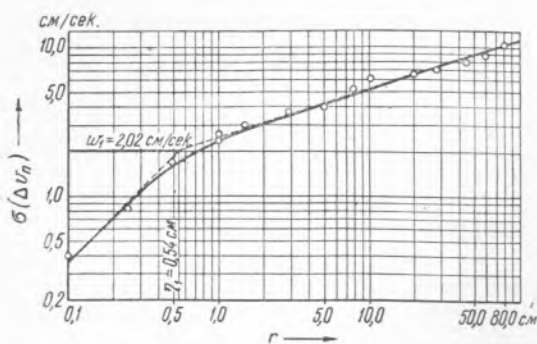


Рис. 2

Полученные такой обработкой из наблюдений Гёдеке значения σ_n были нанесены на график как функция расстояния r в логарифмическом масштабе (рис. 2). Теоретическая кривая (сплошная линия)

$$\sigma_n = w_1 \sqrt{\beta_{nl} \left(\frac{r}{r_1} \right)} \quad (12)$$

дает наилучшее приближение к экспериментальным данным, если принять $\eta = 0,54$ см и $w_1 = 2,02$ см/сек. Значения σ_n при $r > 2$ см (всего 9 экспериментальных точек) могут быть представлены формулой

$$\sigma_n(r) = br^{1/3}, \quad (13)$$

где $b = w_1 / \sqrt{\eta} = 2,47$ см^{2/3}/сек.

Приведем теоретическое выражение для величины b — структурной характеристики поля скоростей:

$$b = \frac{1,072}{3} \frac{3}{\sqrt{|S|}} \sqrt{\epsilon} \quad (14)$$

Структурная характеристика b определяется из наблюдений точнее, чем каждая из величин w_1 и η_1^* . По порядку величины приведенное выше значение b согласуется с измерениями автора⁽⁸⁾. Для логарифмического пограничного слоя (приземный слой атмосферы) из соображений подобия следует, что величина b пропорциональна скорости ветра на фиксированной высоте и обратно пропорциональна корню кубическому из высоты наблюдения.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
27 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Колмогоров, ДАН, 30, № 4 (1941). ² А. Н. Колмогоров, ДАН, 32, № 1 (1941). ³ А. М. Обухов, ДАН, 32, № 1 (1941); Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 4—5 (1941). ⁴ L. Onsager, Phys. Rev., 68, 286 (1945). ⁵ W. Heisenberg, Z. f. Phys., 124, № 7—12, 628 (1948). ⁶ A. A. Townsend, Proc. Cambr. Phil. Soc., 44, № 4, 560 (1948). ⁷ K. Gёdecke, Ann. d. Hydrograph., N. 10, 400 (1936). ⁸ А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. физ., 6, № 1—2 (1942). ⁹ А. М. Обухов, Докторская диссертация, ИТГ АН СССР, М., 1947.

* Принимая значения w_1 и η_1 , указанные в тексте, и кинематическую вязкость воздуха $\nu = 0,16$ см²/сек., мы получили $\epsilon = 17$ см²/сек.³ и $S = -1,35$. Вычисленное значение асимметрии оказалось в 3,5 раза больше, чем в измерениях Таунсенда. Следует отметить, однако, что косвенный метод определения S из эмпирической структурной функции обладает малой точностью. Непосредственных измерений ϵ и S в условиях атмосферной турбулентности не производилось.