Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Я. К. ИЛЬИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КРУГОВОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ С ЭКСЦЕНТРИЧНОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 15 VI 1949)

Методы решения плоской задачи теории упругости, разработанные советскими учеными ([1] и др.), основанные на применении комплексного переменного, сводят решение плоской задачи к определению регулярных функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Благодаря этим методам появилась возможность решать такие практические задачи, которые ранее не могли быть решены. Одной из таких задач, по нашему мнению, является задача о вращающемся диске с эксцентричной осью вращения. Ниже приводится решение этой задачи с помощью интеграла Коши.

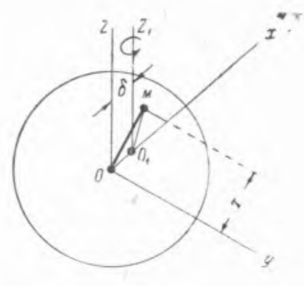

Рис. 1

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть дан однородный, круговой, тонкий диск плотности ρ, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω относительно эксцентричной оси z_1 (рис. 1). Пусть ось вращения z_1 смещена по оси x от центра диска на эксцентриситет δ. Пусть начало координат находится в центре диска в точке O.

Поставим задачу: определить напряжения диска так, чтобы при $\delta \to 0$ получилось известное решение для сплошного диска с центральной осью вращения.

Так как в нашем случае диск находится под действием сил инерции, то бигармоническое уравнение будет с правой частью. Для определения частного решения возьмем дифференциальные уравнения вида:

$$(\lambda+\eta)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\eta\nabla u+\rho\omega^2(x-\delta)=0,\quad (\lambda+\eta)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\eta\nabla v+\rho\omega^2 y=0. \qquad (1)$$

Положив в уравнениях (1) $u=a(x^3+y^2x)+bx^2$, $v=a(y^3+x^2y)$, мы получим значения a и b, при которых уравнения (1) будут удовлетворены. Эти значения будут: $a=-\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\eta)}$, $b=\frac{\rho\omega^2\delta}{2(\lambda+2\eta)}$.

Тогда напряжения определятся по формулам:

$$\sigma_x^{(0)}=\lambda\theta+2\eta\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\rho\omega^2}{4(\lambda+2\eta)}\left[(2\lambda+3\eta)x^2+(2\lambda+\eta)y^2-4(\lambda+2\eta)\delta x\right],$$

$$\sigma_y^{(0)}=\lambda\theta+2\eta\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\rho\omega^2}{4(\lambda+2\eta)}\left[(2\lambda+3\eta)y^2+(2\lambda+\eta)x^2\right], \qquad (2)$$

$$\tau_{xy}^{(0)}=\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\eta}{2(\lambda+2\eta)}xy.$$

Напряжения в полярных координатах будут:

$$\sigma_r^{(0)}+\sigma_\theta^{(0)}=\sigma_x^{(0)}+\sigma_y^{(0)},\quad \sigma_\theta^{(0)}-\sigma_r^{(0)}+2i\tau_{r\theta}^{(0)}=\left[\sigma_y^{(0)}-\sigma_x^{(0)}+2i\tau_{xy}^{(0)}\right]e^{2i\theta},$$

откуда легко получить:

$$\sigma_r^{(0)} = -\rho\omega^2\left[cr^2 - \delta r\cos^3\theta\right], \quad \sigma_\theta^{(0)} = -\rho\omega^2\left[c_1 r^2 - \delta r\sin^2\theta\cos\theta\right],$$
$$\tau_{r\theta}^{(0)} = -\frac{\rho\omega^2 r\delta}{2}\sin 2\theta\cos\theta. \tag{3}$$

Здесь положено $c = \frac{2\lambda + 3\eta}{4(\lambda + 2\eta)}$, $c_1 = \frac{2\lambda + \eta}{4(\lambda + 2\eta)}$.

Имея частные решения для напряжений в виде выражений (2) и (3), перейдем к решению однородного бигармонического уравнения:

$$\nabla^2 U = 0. \tag{4}$$

Так как силы инерции во вращающемся диске (см. рис. 2) с эксцентричной осью вращения приводятся к равнодействующей P, приложенной в точке пересечения O_1 оси вращения с плоскостью диска, то условия регулярности решения уравнения (4) можно записать:

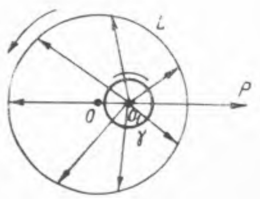

Рис. 2

$$\oint_L \left(x_n^{(0)} + iy_n^{(0)}\right) ds - P = 0, \tag{5}$$

где $x_n^{(0)}$ и $y_n^{(0)}$ определяются напряжениями (2), а сила P может быть определена:

$$P = \rho\omega^2 \int_F (x - \delta)\, dF = -\pi R^2 \delta\rho\omega^2; \tag{6}$$

что касается моментного условия регулярности, то оно очевидно, ибо мы имеем систему сил, пересекающуюся в одной точке.

Рассматривая область диска с особой точкой O_1, где приложена сосредоточенная сила P, по выражению (6) (рис. 2), можем окружить эту точку контуром γ радиуса $r \to 0$ и записать контурные условия

на γ: $$\varphi^*(z) + z\overline{\varphi'^*(z)} + \overline{\psi^*(z)}\big|_\gamma = iP;$$

на L: $$\left(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)}\right)\cos(nx) + \left(\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)}\right)\cos(ny) = 0,$$
$$\left(\sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(1)}\right)\cos(ny) + \left(\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)}\right)\cos(nx) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, общие контурные условия могут быть записаны:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -i\int_0^S \left(x_n^{(0)} + iy_n^{(0)}\right)dS - \left\{\varphi^*(t) + t\overline{\varphi'^*(t)} + \overline{\psi^*(t)}\right\}, \tag{8}$$

где $\varphi(t) = \varphi^{(1)}(t) - \varphi^*(t)$; $\psi(t) = \psi^{(1)}(t) - \psi^*(t)$.

Далее, полагая $\varphi^*(t) = A\ln(t - \delta)$, $\psi^*(t) = B\ln(t - \delta) + \frac{C}{t - \delta}$, определим постоянные A, B и C, по указанию Д. И. Шермана, из смешанных контурных условий на γ, где можно записать:

$$\varphi^*(t) + t\overline{\varphi'^*(t)} + \overline{\psi^*(t)}\big|_\gamma = iP, \quad x\varphi^*(t) - t\overline{\varphi'^*(t)} - \overline{\psi^*(t)}\big|_\gamma = 0; \tag{9}$$

здесь величина x выражается через коэффициенты Ляме: $x = \frac{\lambda + 3\eta}{\lambda + \eta}$.

Из (9) при полном обходе γ будем иметь: $-A2\pi i + B2\pi i = iP$, $-xA2\pi i - B2\pi i = 0$; $xA = -B$ и $tA + C = 0$, откуда получим:

$$A = -\frac{P}{2\pi(1 + x)}, \quad B = \frac{xP}{2\pi(1 + x)}, \quad -C = (t - \delta)A + \delta A = \delta A. \tag{10}$$

Выражение для постоянной C будет иметь такой вид потому, что на γ $t-\delta = re^{i\theta} \to 0$ по условию задачи.

Таким образом, (8) можно записать, учитывая (10):

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} =$$
$$= -\int_0^S (x_n^{(0)} + iy_n^{(0)})\,dS - \frac{P}{2\pi(1+x)}\left[-\ln(t-\delta) + x\ln\overline{(t-\delta)} - \frac{t-\delta}{\overline{t-\delta}}\right].$$

Затем, выражая $x_n^{(0)}$ и $y_n^{(0)}$ через напряжения (2) и вводя комплексную переменную t по зависимости $x = \frac{t+\bar{t}}{2}$, $y = \frac{t-\bar{t}}{2i}$, $\cos\theta = \frac{t+\bar{t}}{2R}$, $\sin\theta = \frac{t-\bar{t}}{2Ri}$, мы интеграл из правой части (8) можем представить:

$$-i\int_0^S (x_n^{(0)} + iy_n^{(0)})\,dS = \frac{\rho\omega^2}{8}\left[8CR^2t - \delta t^2 - 4\delta R^2\ln t + \frac{\delta R^4}{t^2}\right] + \text{const}, \quad (11)$$

где const может быть отброшена, как не влияющая на напряжение.

Далее, учитывая (11), мы всю правую часть условий (8) можем представить окончательно:

$$f_1(t) + if_2(t) =$$
$$= \frac{P}{2\pi(1+x)}\left\{\left[\frac{3+x}{2\delta}\,t - (1+x)\frac{t^2}{4R^2} - (1+x)\ln t + (1+x)\frac{R^2}{4t^2}\right] -\right.$$
$$\left. - \left[-\ln(t-\delta) + x\ln\overline{(t-\delta)} - \frac{t-\delta}{\overline{t-\delta}}\right]\right\}, \quad (12)$$

где произведена замена $C = \frac{3+x}{4(1+x)}$ и общий множитель $\frac{P}{2\pi(1+x)}$ вынесен за скобки.

Н. И. Мусхелишвили для определения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ с помощью интеграла Коши дает формулы:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_1 + if_2}{t-z}\,dt - a_1 z,$$
$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi(1+x)}\int_L \frac{f_1 - if_2}{t-z}\,dt + \frac{R^2 a_1}{z} - \frac{R^2\varphi'(z)}{z}. \quad (13)$$

Для нашего случая мы будем иметь, учитывая (13), следующие значения:

$$a_1 = \frac{P}{4\pi(1+x)}\left[\frac{3+x}{2\delta} + (x-1)\frac{\delta}{R^2}\right],$$

$$\varphi(z) = \frac{P}{2\pi(1+x)}\left[\frac{3+x}{4\delta}z - (x-1)\frac{\delta z}{2R^2} - (1+x)\frac{z^2}{4R^2} -\right.$$
$$\left. - x\ln(R^2 - \delta z) + \frac{z^2 - \delta z}{R^2 - \delta z}\right], \quad (14)$$

$$\psi(z) = \frac{P}{2\pi(1+x)}\left[\frac{1+x}{4}\frac{z^2}{R^2} + \ln(R^2 - \delta z) + \frac{(2-x)R^2\delta^2 + (x-1)\delta^3 z - 2R^4 + R^2\delta z}{(R^2-\delta z)^2}\right].$$

Определение напряжений. Для удовлетворения условий (7) необходимо знать только напряжения $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$ и $\tau_{xy}^{(1)}$, так как напряжения $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}$ и $\tau_{xy}^{(0)}$ нам известны (см. формулы (2)). А зная, что $\varphi^{(1)}(z) = \varphi(z) + \varphi^*(z)$ и $\psi^{(1)}(z) = \psi(z) + \psi^*(z)$, искомые напряжения легко определятся.

Учитывая (14) и (8), мы будем иметь:

$$\varphi^{(1)}(z)=\frac{P}{2\pi(1+x)}\left[\frac{3+x}{4\delta}z-(x-1)\frac{\delta z}{2R^2}-(1+x)\frac{z^2}{4R^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{z^2-\delta z}{R^2-\delta z}-\ln(z-\delta)-x\ln(R^2-\delta z)\right],$$

$$\psi^{(1)}(z)=\frac{P}{2\pi(1+x)}\left[\frac{1+x}{4R^2}z^2+\ln(R^2-\delta z)+x\ln(z-\delta)+\right.\tag{15}$$

$$\left.+\frac{\delta}{z-\delta}+\frac{(1-x)\delta^2-R^2}{R^2-\delta z}-\frac{R^4-\delta^2R^2}{(R^2-\delta z)^2}\right].$$

Для простоты определим напряжения в полярных координатах и проверим правильность решения по контурным условиям на L, где должно быть: $\sigma_r^{(0)}+\sigma_r^{(1)}|_L=0$, здесь $\sigma_r^{(0)}$ имеет значение (3).

По формулам Колосова, Мусхелишвили будем иметь:

$$\sigma_r^{(1)}+\sigma_\theta^{(1)}=2\left[\varphi'^{(1)}(z)+\overline{\varphi'^{(1)}(z)}\right],\tag{16}$$

$$\sigma_\theta^{(1)}-\sigma_r^{(1)}+2i\tau_{r\theta}^{(1)}=2\left[\bar{z}\varphi''^{(1)}(z)+\psi'^{(1)}(z)\right]e^{2i\theta}.\tag{17}$$

Вставляя в (16) и (17) найденные функции (15), отделяя вещественную часть от мнимой в (17)*, получим:

$$\sigma_r^{(1)}=\frac{P}{2\pi(1+x)}(M-\operatorname{Re}N),\quad \sigma_\theta^{(1)}=\frac{P}{2\pi(1+x)}(M+\operatorname{Re}N),\tag{18}$$

$$M=\frac{3+x}{2\delta}-(x-1)\frac{\delta}{R^2}-(1+x)\frac{z+\bar{z}}{2R^2}+\frac{x\delta z^2-x\delta^2z+R^2z-\delta z^2}{R^2(z-\delta)^2}+$$

$$+\frac{x\delta\bar{z}^2+x\delta^2\bar{z}+R^2\bar{z}-\delta\bar{z}^2}{R^2(\bar{z}-\delta)^2},\quad N=\frac{1+x}{2R^4}(z^3-R^2z)+$$

$$+\frac{(x-1)\delta^2(\bar{z}-\delta)+2R^2(\bar{z}-\delta)+\delta^2(z-\bar{z})}{R^2(\bar{z}-\delta)^2}+\frac{xz^2(z-\delta)+z(R^2-\delta z)}{R^2(z-\delta)^2}.$$

Перемножая сопряженные знаменатели, т. е. приводя дроби к общему знаменателю, не касаясь вещественных знаменателей и беря только вещественную часть, мы получим при наложении $\sigma_r^{(1)}$ из (18) и $\sigma_r^{(0)}$ из (3) следующее выражение:

$$\sigma_r=\sigma_r^{(0)}+\sigma_r^{(1)}=\frac{P}{2\pi(1+x)}\left[\frac{3+x}{2\delta R^2}(R^2-r^2)-\frac{1+x}{2R}(R-r)(\cos 3\theta+3\cos\theta)\right],\tag{19}$$

откуда получим при $r=R$: $\sigma_r^{(0)}+\sigma_r^{(1)}=0$. Затем, вынося за скобки множитель из знаменателя, равный δR^2, и заменяя P его значением по формуле (6), мы будем иметь:

$$\sigma_r=-\left[\frac{3+x}{4(1+x)}(R^2-r^2)-\frac{\delta(R-r)}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)\right].$$

При $\delta=0$ получим известное выражение для радиального напряжения во вращающемся диске с центральной осью вращения.

Поступило
26 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. В. Колосов, Применение комплексного переменного в теории упругости, 1935. [2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, изд. АН СССР, 1933. [3] Д. И. Шерман, ДАН, 27, № 9 (1940); Изв. АН СССР, ОТН, № 9 (1948).

* Мнимая часть (17) даст $\tau_{r\theta}$