Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

М. ШВЕЦ

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ДИФФУЗИИ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 18 VI 1949)

Как известно, между процессами диффузии и теплопередачи существует известная аналогия, поэтому, вообще говоря, не нужно рассматривать отдельно теорию каждого из этих процессов.

Однако, как показал Нуссельт [1], при больших концентрациях газа (или пара) составляющая v' скорости, перпендикулярная к поверхности, поглощающей или испаряющей диффундирующее вещество, не обращается в нуль на этой поверхности, и, следовательно, указанная аналогия в этом случае не имеет места.

Настоящая работа посвящена рассмотрению этого особого случая.

Согласно Нуссельту, при установившейся диффузии на поверхности имеет место следующее условие:

$$v' = -\frac{k}{q_0'\left(\frac{p}{p_0}-1\right)}\left(\frac{\partial q'}{\partial y'}\right)_0, \tag{1}$$

где q' — концентрация пара или газа, для которого поверхность проницаема; q_0' — концентрация на этой поверхности; p_0 — парциальное давление пара или газа; p — общее давление; y' — расстояние по нормали к поверхности; k — коэффициент диффузии.

Если имеет место испарение, то $v'>0$; если, наоборот, происходит конденсация (или поглощение газа), $v'<0$.

Допустим, что движение газа носит ламинарный характер и что вдали от поверхности, которую мы для простоты будем считать плоской, концентрация и скорость потока постоянны и равны q_1' и U, соответственно; тогда для описания стационарного процесса диффузии служат следующие уравнения и граничные условия*:

а) уравнение движения:

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}; \tag{2}$$

б) уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0; \tag{3}$$

* Рассматривается плоская задача.

в) уравнение диффузии:

$$u' \frac{\partial q'}{\partial x'} + v' \frac{\partial q'}{\partial y'} = k \frac{\partial^2 q'}{\partial y'^2}; \tag{4}$$

г) граничные условия:

$$u' = 0, \quad q'(0) = q'_0, \quad u'(\infty) = U, \quad q'(\infty) = q'_1; \tag{5}$$

здесь u' — продольная составляющая скорости, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Введем безразмерные величины по формулам:

$$x' = lx, \quad y' = \frac{l}{\sqrt{\mathrm{Re}}} y, \quad v' = \frac{U}{\sqrt{\mathrm{Re}}} v, \quad u' = Uu, \quad c = \frac{q' - q'_0}{q'_1 - q'_0}.$$

Вместо уравнений (2) — (4) мы будем иметь

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение толщину скоростного пограничного слоя δ и толщину диффузионного слоя δ_*. Тогда краевые условия (1) и (5) в безразмерном виде запишутся так:

$$u = c = 0, \quad v = N' \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_0 \quad \text{при } y = 0$$

$$\left(N' = - \frac{k}{\nu} \frac{q'_1 - q'_0}{q'_0 \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right)} \right); \tag{9}$$

$$u = 1 \quad \text{при} \quad y = \delta; \qquad c = 1 \quad \text{при} \quad y = \delta_*.$$

Из уравнения неразрывности находим

$$v = N' \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_0 - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \tag{10}$$

Подставляя это выражение в уравнения (6) и (8), получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + N' \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_0 \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{11}$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + N' \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_0 \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \tag{12}$$

Будем решать эту систему приближенным методом, изложенным в нашей работе ([2]).

Приравнивая левые части уравнений (11) и (12) нулю и затем интегрируя дважды, находим нулевые приближения: $u = \frac{y}{\delta}$, $c = \frac{y}{\delta_*}$.

Подставляя эти значения u и c и левые части (11) и (12), получаем в следующем приближении*:

$$u = \xi + \frac{N'}{2}\beta(\xi^2 - \xi) - \frac{\delta\dot{\delta}}{24}(\xi^4 - \xi), \tag{13}$$

$$c = \eta + \frac{N'\,\mathrm{Pr}}{2}(\eta^2 - \eta) - \frac{\delta\dot{\delta}}{24}\frac{\mathrm{Pr}}{\beta^3}(\eta^4 - \eta), \tag{14}$$

где $\xi = \frac{y}{\delta}$, $\eta = \frac{y}{\delta_*}$, $\beta = \frac{\delta}{\delta_*}$.

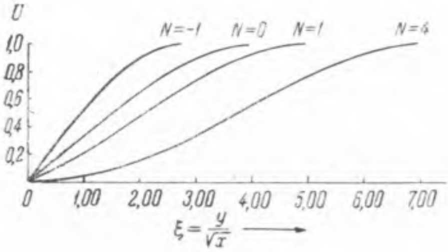

Рис. 1

Значения δ и β находятся из условий

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = 1 + \frac{N'\beta}{2} - \frac{\delta\dot{\delta}}{8} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = 1 + \frac{N'\,\mathrm{Pr}}{2} - \frac{\delta\dot{\delta}}{8}\frac{\mathrm{Pr}}{\beta^3} = 0,$$

откуда $\delta = 4\sqrt{\left(1 + \frac{N'\beta}{2}\right)x}$, а β находится из уравнения

$$\frac{\mathrm{Pr}}{\beta^3} - 1 + \frac{N'\,\mathrm{Pr}}{2}\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right) = 0.$$

Выражения (13) и (14) могут быть преобразованы к виду:

$$u = \xi + \frac{N'\beta}{2}(\xi^2 - \xi) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{N'\beta}{2}\right)(\xi^4 = \xi), \tag{13'}$$

$$c = \eta + \frac{N'\,\mathrm{Pr}}{2}(\eta^2 - \eta) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{N'\,\mathrm{Pr}}{2}\right)(\eta^4 - \eta). \tag{14'}$$

Из (13') и (14') находим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{4 - N'\beta}{12\sqrt{\left(1 + \frac{N'\beta}{2}\right)x}},$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{4 - N'\,\mathrm{Pr}}{12\sqrt{\left(1 + \frac{N'\beta}{2}\right)x}}\beta.$$

* Точкой обозначено дифференцирование по x.

При $N'=0$ имеем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{0{,}333}{\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{0{,}333\sqrt{\mathrm{Pr}}}{\sqrt{x}}.$$

Как известно, для $N'=0$ имеется точное решение задачи ([3,4]), которое дает для $\left(\frac{du}{dy}\right)_0$ и $\left(\frac{dc}{dy}\right)_0$ значения, отличающиеся от приближенных лишь числовым множителем, равным 0,332.

На рис. 1 дан график u для $\mathrm{Pr}=1$ и различных $N=N'\beta$.

Поступило
13 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Nusselt, Zs. f. angew. Math. u. Mech., **10**, 105 (1930). [2] М. Е. Швец, Прикладн. матем. и мех., № 3 (1949). [3] H. Blasius, Zs. f. angew. Math. u. Phys., **56** (1908). [4] E. Pohlhausen, Zs. f. angew. Math. u. Mech., No. 1 (1921).