Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

АЭРОДИНАМИКА

А. М. ЯГЛОМ

О ПОЛЕ УСКОРЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 VI 1949)

В 1941 г. А. Н. Колмогоров ([1, 2]) развил общую теорию локально изотропной турбулентности, позволившую далеко продвинуть изучение полей гидродинамических элементов в турбулентном потоке при больших числах Рейнольдса. В работах А. Н. Колмогорова ([1, 2]) и А. М. Обухова ([3—6]) эта теория была использована для исследования поля скоростей потока, поля давлений и поля температур. В качестве основной характеристики рассматриваемых полей в этих работах принималась структурная функция — среднее значение квадрата разности соответствующих гидродинамических элементов в двух точках потока. При не слишком большом расстоянии между точками такая структурная функция зависит лишь от локального устройства турбулентности (т. е. определяется движением мелких вихрей), что позволяет получить для нее общее выражение, не зависящее от геометрии потока и свойств осредненного течения.

В настоящей заметке теория локально изотропной турбулентности используется для изучения поля ускорений в турбулентном потоке. Это поле отличается от полей, рассмотренных в работах ([1—6]), в том отношении, что значение ускорения в одной точке потока определяется в основном мелкими вихрями, в то время как для скорости, давления и температуры за значение пульсации соответствующей величины в одной точке ответственны в основном крупнейшие вихри и лишь разности этих значений определяются локальной структурой. В связи с этим в случае поля ускорений общее выражение можно получить не только для структурной функции поля, но и для среднего квадратичного значения ускорения частицы жидкости в одной точке потока. Мы здесь ограничимся вычислением лишь этой последней величины, являющейся наиболее интересной характеристикой поля ускорений.

Воспользуемся уравнениями движения жидкости

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\Delta v_i \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3\right). \tag{1}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{3}\overline{\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2} = \frac{1}{\rho^2}\sum_{i=1}^{3}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2} + \nu^2\sum_{i=1}^{3}\overline{(\Delta v_i)^2} - \frac{2\nu}{\rho}\sum_{i=1}^{3}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}\Delta v_i} \tag{2}$$

(черта сверху у нас всюду служит символом осреднения). В силу локальной изотропности потока мы можем здесь последний член справа считать равным нулю, а первые два члена выразить через структурные функции поля скоростей и поля давления:

$$\sum_{i=1}^{3}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2}=\frac{3}{2}\,\frac{d^2\,\Pi(0)}{dr^2}\,,\qquad \sum_{i=1}^{3}\overline{(\Delta v_i)^2}=-\frac{1}{2}\,\Delta^2 D_{ll}(0)-\Delta^2 D_{nn}(0),\tag{3}$$

где

$$\Pi(r)=\overline{[p(M')-p(M)]^2},\tag{4}$$

$$D_{ll}(r)=\overline{[v_l(M')-v_l(M)]^2},\quad D_{nn}(r)=\overline{[v_n(M')-v_n(M)]^2},\tag{5}$$

r — расстояние между точками M' и M; v_l — проекция скорости на направление $\overrightarrow{MM'}$; v_n — проекция скорости на направление, ортогональное к $\overrightarrow{MM'}$.

Подсчитаем, прежде всего, чему равен второй член справа уравнения (2). Из первой гипотезы о подобии А. Н. Колмогорова ([1]) следует, что в случае больших чисел Рейнольдса при малом r

$$D_{ll}(r)=(\nu\varepsilon)^{1/2}\,\beta_{ll}(r/\eta)=(\nu\varepsilon)^{1/2}\,[a(r/\eta)^2+b(r/\eta)^4+\ldots],\tag{6}$$

где $\eta=(\nu^3\varepsilon^{-1})^{1/4}$, а ε есть средняя диссипация энергии турбулентного движения за единицу времени, отнесенная к единице массы жидкости. Выразив далее $D_{nn}(r)$ через $D_{ll}(r)$ при помощи известного соотношения Кармана ([1, 7]), следующего из уравнения неразрывности, и воспользовавшись вторым из равенств (3), нетрудно показать, что

$$\nu^2\sum_i\overline{(\Delta v_i)^2}=-420\,b\nu^{-1/2}\,\varepsilon^{3/2}.\tag{7}$$

Константу b в равенствах (6) и (7) можно без труда выразить через величину $s_0=\overline{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^3}\Big/\left[\overline{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2}\right]^{3/2}$ — значение асимметрии распределения вероятностей для $\partial v_1/\partial x_1$. Действительно, продифференцировав уравнение Колмогорова, связывающее значения среднего квадрата и среднего куба разности скоростей в случае локально изотропной турбулентности (([2]), уравнение (5); см. также ([4]), уравнение (3)), по r три раза и положив затем $r=0$, мы найдем, что $b=s_0/360\sqrt{15}$ (ср. также ([8])). Отсюда

$$\nu^2\sum_i\overline{(\Delta v_i)^2}=-\frac{7\,s_0}{6\sqrt{15}}\,\nu^{-1/2}\varepsilon^{3/2}\approx-0{,}3\,s_0\,\nu^{-1/2}\varepsilon^{3/2}.\tag{8}$$

Величина s_0 известна из измерений Таунсенда ([9]) (производившихся в локально изотропном потоке в аэродинамической трубе); согласно этим измерениям, $s_0\approx-0{,}4$.

Перейдем теперь к расчету первого члена справа уравнения (2). С этой целью мы воспользуемся приемом, использованным А. М. Обуховым в работе ([5]). Из уравнений (1) и уравнения неразрывности следует, что $\Delta p=-\rho\sum_{i,\,j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$. Пользуясь этим равенством, легко выразить $\Delta^2\,\Pi(r)$ через четвертые моменты поля скоростей. Предполагая теперь, что четвертые моменты поля скоростей выражаются через вторые моменты так же, как в случае нормального распределения вероятностей (гипотеза М. Д. Миллионщикова ([10]), повидимому, выполняющаяся со сравнительно большой точностью; ср. результаты непосредственных измерений вторых и четвертых моментов для $\partial v_1 / \partial x_1$ в ([9])), А. М. Обухов получил для $\Pi(r)$ дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^4 \Pi(r)}{dr^4} + \frac{4}{r} \frac{d^3 \Pi(r)}{dr^3} = -\rho^2 \varphi(r), \tag{9}$$

где $\varphi(r)$ есть некоторое билинейное выражение относительно производных вторых моментов поля скоростей (([5]), уравнение (13)). Проделав некоторые несложные, но довольно громоздкие преобразования, можно показать, что

$$\varphi(r) = \frac{6}{r^2}\left(\frac{dD_{ll}}{dr}\right)^2 + \frac{20}{r}\frac{dD_{ll}}{dr}\frac{d^2D_{ll}}{dr^2} + 4\frac{dD_{ll}}{dr}\frac{d^3D_{ll}}{dr^3} + 4\left(\frac{d^2D_{ll}}{dr^2}\right)^2. \tag{10}$$

Нас интересует решение уравнения (9), являющееся структурной функцией изотропного скалярного поля. Такая функция обязательно должна удовлетворять следующим условиям, обеспечивающим единственность решения уравнения (9):

$$\Pi(0) = 0, \quad \Pi'(0) = 0, \quad \Pi(r)/r^2 \to 0 \text{ при } r \to \infty. \tag{11}$$

Нетрудно построить функцию Грина для уравнения (9) при граничных условиях (11) и, следовательно, найти нужное нам решение $\Pi(r)$ этого уравнения. При этом оказывается, что

$$\Pi''(0) = \frac{\rho^2}{3}\int_0^\infty x\varphi(x)\,dx. \tag{12}$$

Для вычисления интеграла (12) нужно знать функцию $D_{ll}(r)$. Известно ([2], [7]), что при r малых по сравнению с η функция $D_{ll}(r)$ пропорциональна r^2 (ср. (6)), а при r больших по сравнению с η — пропорциональна $r^{2/3}$. Для определения этой функции в промежуточной области нужны дополнительные гипотезы. Мы здесь воспользуемся результатами работы А. М. Обухова ([4]), предположившего, что асимметрия s распределения вероятностей для продольной разности скоростей в двух точках не зависит от расстояния между этими точками (т. е. что $s \equiv s_0$; это предположение подтверждается непосредственными измерениями асимметрии s в аэродинамической трубе ([9])). При указанном предположении производная dD_{ll}/dr (а следовательно, и функция $\varphi(r)$) выражается через саму функцию $D_{ll}(r)$ (см. ([4]), уравнение (5)). Воспользовавшись данными работы ([4]) и применив численное интегрирование, мы найдем, что $\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx \approx -2{,}2\, s_0^{-1}\,\nu^{-1/2}\,\varepsilon^{3/2}$. Отсюда, в силу (12) и первого из равенств (3), следует, что *

$$\frac{1}{\rho^2}\sum_{i=1}^{3}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2} \approx -\frac{1{,}1}{s_0}\,\nu^{-1/2}\,\varepsilon^{3/2}. \tag{13}$$

---

* Уже после того, как настоящая работа была закончена, автор познакомился со статьей Гейзенберга ([11]), также содержащей расчет величины $\sum_i \overline{(\partial p / \partial x_i)^2}$ для локально изотропной турбулентности. Метод Гейзенберга основан на использовании спектральной функции (трансформации Фурье структурной функции) и приводит к значительно более сложным, чем у нас, вычислениям. К тому же в окончательную формулу Гейзенберга входят величины, плохо определяемые на опыте.

Сравнивая (13) с (8) и принимая во внимание, что $s_0 \approx -0{,}4$, мы убедимся, что ускорение частиц жидкости в турбулентном потоке при больших числах Рейнольдса в основном определяется величиной флуктуирующих градиентов давления. Окончательно для расчета среднего значения квадрата ускорения в турбулентном потоке можно пользоваться формулой

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2} = 3\,\nu^{-1/2}\varepsilon^{3/2}, \tag{14}$$

вытекающей из (2), (8), (13) и $s_0 \approx -0{,}4$.

Воспользуемся общей формулой (14) для расчета турбулентных ускорений в логарифмическом пограничном слое. В этом случае $\varepsilon = v_*^3 / \varkappa y$, где v_* — так называемая динамическая скорость (определяемая по разности средних скоростей в двух точках или по средней скорости в одной точке и величине шероховатости), y — расстояние от стенки, а $\varkappa$ — константа, равная приблизительно 0,4 (см., например, ([7]), стр. 162). Полагая далее $\nu = 0{,}16$ см²/сек. (вязкость воздуха), мы для этого случая получим следующую формулу:

$$w = \sqrt{\sum_i \overline{\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2}} \approx 5{,}5\,\frac{v_*^{9/4}}{y^{3/4}}\ \text{см / сек}^2. \tag{15}$$

Отметим, что среднее квадратичное значение ускорения w оказывается пропорциональным средней скорости V в степени $^9/_4$:

$$w \sim V^{9/4}, \tag{16}$$

т. е. w быстро растет с ростом V. Так, например, в логарифмическом пограничном слое в атмосфере при скорости ветра V на высоте $y = 150$ см и шероховатости $h_0 = 3$ см $v_* = \varkappa V / \ln(y / h_0) \approx 0{,}1\ V$ и, следовательно, ускорение w при различных значениях скорости ветра V будет принимать следующие значения

V, м / сек.	1	3	5	8
w, см / сек.²	22	260	830	2400

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
18 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, ДАН, 30, № 4 (1941). [2] А. Н. Колмогоров, ДАН, 32, № 1 (1941). [3] А. М. Обухов, ДАН, 32, № 1 (1941; Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4—5 (1941). [4] А. М. Обухов, ДАН, 67, № 4 (1949). [5] А. М. Обухов, ДАН, 66, № 1 (1949). [6] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 13, № 1 (1949). [7] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1944. [8] G. K. Batchelor, Proc. Cambr. Phil. Soc., 43, No. 4 (1947). [9] A. A. Townsend, ibid., 44, No. 4 (1948). [10] М. Д. Миллионщиков, ДАН, 32, № 9 (1941); Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4—5 (1941). [11] W. Heisenberg, Zs. f. Phys., 124, H. 7—12, 628 (1948).