

Е. В. СТУПОЧЕНКО

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В СИСТЕМАХ С ИСТОЧНИКАМИ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком С. И. Вивилковым 27 V 1949)

В (1) было рассмотрено распределение кинетической энергии частиц, производимых некоторыми источниками в газовой системе. Ниже рассматривается вторая сторона вопроса. Источники частиц (реакция) являются фактором, возмущающим равновесное распределение энергии молекул окружающего газа.

Задача ставится так: найти распределение кинетической энергии в газовой системе с источниками частиц в практически интересной области „далеких“ энергий.

Пусть  $N(c)dc$  — число частиц с начальной скоростью  $(c, c + dc)$ , появляющихся в единице объема в единицу времени в результате деятельности источников, равномерно распределенных в пространстве.  $N(c)$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для дальнейшего полезно рассмотреть общую задачу, когда выражение

$$\bar{N} = \int_0^{\infty} N(c) dc \quad (1)$$

может и не равняться нулю.

Вводим обозначение

$$I(FG_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{(c_1)} |c_1 - c| \{F'G'_1 - FG_1\} dc, b db d\varphi, \quad (2)$$

где  $F = F(c)$ ,  $F' = F(c')$ ,  $F_1 = F(c_1)$ ,  $F'_1 = F(c'_1)$  и т. д.;  $c, c_1$  — скорости соударяющихся молекул до удара;  $c', c'_1$  — соответственно после удара;  $b$  — прицельное расстояние;  $\varphi$  — угловой параметр удара.

Рассмотрим для упрощения случай равенства масс и общего для всех частиц закона взаимодействия и пусть  $f(c, t)dc$  — полное число частиц в единице объема, обладающих скоростью  $(c, dc)$ . Кинетическое уравнение Больцмана, обобщенное на случай источников частиц, принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = I(ff_1) + \frac{N(c)}{4\pi c^2}. \quad (3)$$

Вводим безразмерный параметр  $\beta$ , характеризующий порядок интенсивности источников, например, следующим образом

$$\beta = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} |N(c)| \tau(c) dc, \quad (4)$$

где

$$\rho = \int_{(c)} f(c, t) dc \quad (5)$$

и  $\tau(c)$  — среднее время, протекающее до ближайшего соударения молекулы с какой-либо из окружающих. В практически интересных случаях  $\beta \ll 1$ .

Для линеаризации уравнения (3) применим метод, аналогичный разработанному (<sup>2</sup>, <sup>3</sup>) при изучении функций распределения гидродинамически неравновесных систем.

Ищем решение в виде ряда

$$f(c, t) = f^{(0)}(c; \rho, \theta) + \beta f^{(1)}(c; \rho, \theta) + \beta^2 f^{(2)}(c; \rho, \theta) + \dots \quad (6)$$

Для  $\rho$  и  $\theta$ , определяемого равенством

$$\rho \theta = \int_{(c)} f(c, t) \frac{mc^2}{2} dc, \quad (7)$$

имеем разложения

$$\frac{d\rho}{dt} = \beta R_1(\rho, \theta) + \beta^2 R_2(\rho, \theta) + \dots, \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta \Phi_1(\rho, \theta) + \beta^2 \Phi_2(\rho, \theta) + \dots \quad (8')$$

Из (5) и (7) получаем дополнительные условия:

$$\int_{(c)} f^{(0)} dc = \rho; \quad \int_{(c)} f^{(1)} dc = 0; \dots \text{ и т. д.} \quad (9)$$

$$\int_{(c)} \frac{mc^2}{2} f^{(0)} dc = \rho \theta; \quad \int_{(c)} \frac{mc^2}{2} f^{(1)} dc = 0, \dots \text{ и т. д.} \quad (9')$$

Кроме того, накладывается условие изотропности.

Для упрощения выкладок воспользуемся приемом формального введения параметра  $\beta$ , полагая в окончательных формулах  $\beta = 1$ . С помощью кинетического уравнения находим:

$$R_1 = \tilde{N}; \quad R_2 = R_3 = \dots = 0, \quad (10)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{mc^2}{2} N(c) dc - \tilde{N} \bar{v} \right\}; \quad \Phi_2 = \Phi_3 = \dots = 0. \quad (10')$$

Подставляя (6), (8), (8') в (3) и сравнивая члены одинаковых порядков, получим следующие интегральные уравнения для  $f^{(0)}, f^{(1)}$  и т. д.:

$$I(f^{(0)} f_1^{(0)}) = 0, \quad (11)$$

$$I(f^{(0)} f_1^{(1)}) + I(f^{(1)} f_1^{(0)}) + \frac{N(c)}{4\pi c^2} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} R_1 + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \theta} \Phi_1, \quad (12)$$

и для  $r > 1$ :

$$\sum_{i=0}^r I(f^{(i)} f_1^{(r-i)}) = \frac{\partial f^{(r-1)}}{\partial \rho} R_1 + \frac{\partial f^{(r-1)}}{\partial \theta} \Phi_1. \quad (13)$$

Решением уравнения (11) является максвелловское распределение, нормировка которого и температура определяются из (9) и (9'). Уравнение для определения  $f^{(r)}$ , где  $r \geq 1$ , имеет вид

$$I(f^{(0)} f_1^{(r)}) + I(f^{(r)} f_1^{(0)}) = A(c; f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(r-1)}), \quad (14)$$

где  $A(c; f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(r-1)})$  является функционалом, зависящим от вида функций  $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(r-1)}$ , определяемых из предшествующих уравнений.

Уравнение (14) — неоднородное линейное интегральное уравнение. Соответствующее однородное уравнение имеет решения:  $f^{(0)} \alpha_1$ ;  $f^{(0)} \vec{\alpha}_2 mc$ ;  $f^{(0)} \alpha_3 \frac{mc^2}{2}$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — произвольные постоянные.

Может быть показана ортогональность соответствующих решений союзного однородного уравнения к свободному члену в (14), и тем самым разрешимость уравнений (14).

Рассмотрим случай „монокроматического“ источника по двум основаниям: во-первых, общий случай любого спектра начальных энергий получается интегрированием результатов для дельтообразного источника, и, во-вторых, желательно сравнить в простейших условиях результаты с задачей, рассмотренной в (1).

Итак, примем

$$N(c) = N \delta(c - c_0); \quad N > 0. \quad (15)$$

Можно убедиться, что в  $f^{(1)}$  будет присутствовать дельтообразная компонента:

$$f^{(1)}(c) = f_*^{(1)}(c) + \frac{n_0 \delta(c - c_0)}{4\pi c^2}, \quad (16)$$

где  $f_*^{(1)}(c)$  — непрерывная функция от  $c$ , а  $n_0 = n_0(\rho, \theta, N)$ . Форма дополнительных условий для  $f_*^{(1)}$  очевидна.

В качестве аппроксимации закона взаимодействия примем идеальный потенциальный барьер. Решаем задачу — о распределении в „далекой“ области, — минуя нахождение точного решения интегрального уравнения. Укажем лишь общий ход.

Вводим вместо  $c$  переменную  $x = mc^2 / 2kT$  и в качестве искомой функции  $u(x) = f_*^{(1)}(x) / \tau(x)$ , где  $f_*^{(1)}(x) dx$  дает число частиц со значениями  $x$  в интервале  $(x, x + dx)$ ;  $\tau(x)$  — среднее время, протекающее до ближайшего соударения.

Выполняя в (12) все возможные интегрирования, находим, что в области «больших» значений (критерием является неравенство  $e^{-x} \ll 1$ ) удовлетворяется с тем же приближением, что и в (1), равенство

$$u(x) = 2 \int_0^{\infty} u(x') \omega(x', x) dx' + 2N \omega(x_0, x), \quad (17)$$

где  $w(x', x)$  — вероятности перехода, определенные в (1). Некоторое частное решение (12) удовлетворяет (в той же области  $e^{-x} \ll 1$ ) приближенному дифференциальному уравнению (18), получаемому из (17) двукратным дифференцированием

$$u''(x) + u'(x) + 2 \frac{u(x)}{x + 1/2} = 0. \quad (18)$$

Из общего решения (18) и дополнительных условий — поведение в  $+\infty$ , условия разрыва в точке  $x_0 = mc_0^2 / 2kT$ ,

$$u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0); \quad u'(x_0 - 0) - u'(x_0 + 0) = \frac{2N}{x_0 + 1/2}, \quad (19)$$

можно построить искомое решение, пользуясь также аддитивными решениями однородного интегрального уравнения.

Окончательный результат для полной функции распределения в области „далеких“ энергий принимает вид:

$$f_-(x) = \{\rho_0 + BI(x)(x - 3/2)\} f^0(x) \quad (x < x_0); \quad (20)$$

$$f_+(x) = \{\rho_0 + BI(x_0)(x - 3/2)\} f^0(x) \quad (x > x_0), \quad (20')$$

где  $\rho_0$  — полное число частиц (максвелловски распределенных);

$$I(x) = \int_{\eta}^x \frac{e^x dx}{(x + 1/2)^2 (x - 3/2)^2}; \quad (21)$$

$\eta$  — некоторая постоянная, близкая к 2, и

$$B = \frac{NV\bar{m}}{V 2\pi kT D^2 \rho_0}; \quad (22)$$

$D$  — диаметр частиц;  $f^0(x)$  — максвелловское распределение, нормированное к единице. Кроме того,  $n_0 = N\tau(x_0)$ .

Как видим, в противоположность задаче о распределении частиц — продуктов реакции (1), распределение всюду нематвелловское.

Изложенный способ решения может быть распространен на многокомпонентные системы (различные массы и размеры частиц).

Научно-исследовательский институт физики  
Московского государственного университета  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
26 V 1949

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Е. В. Ступоченко, ДАН, 67, № 3 (1949). <sup>2</sup> S. Chapman and T. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, 1939. <sup>3</sup> Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, 1946.