Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 4

ФИЗИКА

Е. В. СТУПОЧЕНКО

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В СИСТЕМАХ С ИСТОЧНИКАМИ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 27 V 1949)

В [1] было рассмотрено распределение кинетической энергии частиц, производимых некоторыми источниками в газовой системе. Ниже рассматривается вторая сторона вопроса. Источники частиц (реакция) являются фактором, возмущающим равновесное распределение энергии молекул окружающего газа.

Задача ставится так: найти распределение кинетической энергии в газовой системе с источниками частиц в практически интересной области „далеких“ энергий.

Пусть $N(c)\,dc$ — число частиц с начальной скоростью $(c, c+dc)$, появляющихся в единице объема в единицу времени в результате деятельности источников, равномерно распределенных в пространстве. $N(c)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для дальнейшего полезно рассмотреть общую задачу, когда выражение

$$\bar{N} = \int_0^\infty N(c)\,dc \tag{1}$$

может и не равняться нулю.

Вводим обозначение

$$I(FG_1) = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty\int_{(\mathbf{c}_1)} |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}|\,\{F'G_1' - FG_1\}\,d\mathbf{c}_1\,b\,db\,d\varphi. \tag{2}$$

где $F = F(\mathbf{c})$, $F' = F(\mathbf{c}')$, $F_1 = F(\mathbf{c}_1)$, $F_1' = F(\mathbf{c}_1')$ и т. д.; $\mathbf{c}, \mathbf{c}_1$ — скорости соударяющихся молекул до удара; $\mathbf{c}', \mathbf{c}_1'$ — соответственно после удара; b — прицельное расстояние; φ — угловой параметр удара.

Рассмотрим для упрощения случай равенства масс и общего для всех частиц закона взаимодействия и пусть $f(\mathbf{c}, t)\,d\mathbf{c}$ — полное число частиц в единице объема, обладающих скоростью $(\mathbf{c}, d\mathbf{c})$. Кинетическое уравнение Больцмана, обобщенное на случай источников частиц, принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = I(ff_1) + \frac{N(c)}{4\pi c^2}. \tag{3}$$

Вводим безразмерный параметр β, характеризующий порядок интенсивности источников, например, следующим образом

$$\beta = \frac{1}{\rho} \int_{0}^{\infty} |N(c)| \tau(c) \, dc, \tag{4}$$

где

$$\rho = \int_{(\mathbf{c})} f(\mathbf{c}, t) \, d\mathbf{c} \tag{5}$$

и $\tau(c)$ — среднее время, протекающее до ближайшего соударения молекулы с какой-либо из окружающих. В практически интересных случаях $\beta \ll 1$.

Для линеаризации уравнения (3) применим метод, аналогичный разработанному ([2, 3]) при изучении функций распределения гидродинамически неравновесных систем.

Ищем решение в виде ряда

$$f(\mathbf{c}, t) = f^{(0)}(\mathbf{c}; \rho, \theta) + \beta f^{(1)}(\mathbf{c}; \rho, \theta) + \beta^2 f^{(2)}(\mathbf{c}; \rho, \theta) + \ldots \tag{6}$$

Для ρ и θ, определяемого равенством

$$\rho\theta = \int_{(\mathbf{c})} f(\mathbf{c}, t) \frac{mc^2}{2} \, d\mathbf{c}, \tag{7}$$

имеем разложения

$$\frac{d\rho}{dt} = \beta R_1(\rho, \theta) + \beta^2 R_2(\rho, \theta) + \ldots, \tag{8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta \Phi_1(\rho, \theta) + \beta^2 \Phi_2(\rho, \theta) + \ldots \tag{8'}$$

Из (5) и (7) получаем дополнительные условия:

$$\int_{(\mathbf{c})} f^{(0)} \, d\mathbf{c} = \rho; \qquad \int_{(\mathbf{c})} f^{(1)} \, d\mathbf{c} = 0; \ldots \quad \text{и т. д.} \tag{9}$$

$$\int_{(\mathbf{c})} \frac{mc^2}{2} f^{(0)} \, d\mathbf{c} = \rho\theta; \qquad \int_{(\mathbf{c})} \frac{mc^2}{2} f^{(1)} \, d\mathbf{c} = 0, \ldots \quad \text{и т. д.} \tag{9'}$$

Кроме того, накладывается условие изотропности.

Для упрощения выкладок воспользуемся приемом формального введения параметра β, полагая в окончательных формулах $\beta = 1$. С помощью кинетического уравнения находим:

$$R_1 = \tilde{N}; \quad R_2 = R_3 = \ldots = 0, \tag{10}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho} \left\{ \int_{0}^{\infty} \frac{mc^2}{2} N(c) \, dc - \tilde{N}\theta \right\}; \qquad \Phi_2 = \Phi_3 = \ldots = 0. \tag{10'}$$

Подставляя (6), (8), (8′) в (3) и сравнивая члены одинаковых порядков, получим следующие интегральные уравнения для $f^{(0)}, f^{(1)}$ и т. д.:

$$I(f^{(0)} f_1^{(0)}) = 0, \tag{11}$$

$$I(f^{(0)} f_1^{(1)}) + I(f^{(1)} f_1^{(0)}) + \frac{N(c)}{4\pi c^2} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} R_1 + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \theta} \Phi_1, \tag{12}$$

и для $r > 1$:

$$\sum_{i=0}^{r} I(f^{(i)} f_1^{(r-i)}) = \frac{\partial f^{(r-1)}}{\partial \rho} R_1 + \frac{\partial f^{(r-1)}}{\partial \theta} \Phi_1. \tag{13}$$

Решением уравнения (11) является максвелловское распределение, нормировка которого и температура определяются из (9) и (9′). Уравнение для определения $f^{(r)}$, где $r \geqslant 1$, имеет вид

$$I(f^{(0)} f_1^{(r)}) + I(f^{(r)} f_1^{(0)}) = A(\mathbf{c}; f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(r-1)}), \tag{14}$$

где $A(\mathbf{c}; f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(r-1)})$ является функционалом, зависящим от вида функций $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(r-1)}$, определяемых из предшествующих уравнений.

Уравнение (14) — неоднородное линейное интегральное уравнение. Соответствующее однородное уравнение имеет решения: $f^{(0)} \alpha_1$; $f^{(0)} \vec{\alpha}_2 m\mathbf{c}$; $f^{(0)} \alpha_3 \frac{mc^2}{2}$, где α_1, $\vec{\alpha}_2$, α_3 — произвольные постоянные.

Может быть показана ортогональность соответствующих решений союзного однородного уравнения к свободному члену в (14), и тем самым разрешимость уравнений (14).

Рассмотрим случай „монохроматического“ источника по двум основаниям: во-первых, общий случай любого спектра начальных энергий получается интегрированием результатов для дельтообразного источника, и, во-вторых, желательно сравнить в простейших условиях результаты с задачей, рассмотренной в ([1]).

Итак, примем

$$N(c) = N\delta(c - c_0); \quad N > 0. \tag{15}$$

Можно убедиться, что в $f^{(1)}$ будет присутствовать дельтообразная компонента:

$$f^{(1)}(\mathbf{c}) = f_*^{(1)}(\mathbf{c}) + \frac{n_0 \delta(c - c_0)}{4\pi c^2}, \tag{16}$$

где $f_*^{(1)}(\mathbf{c})$ — непрерывная функция от $\mathbf{c}$, а $n_0 = n_0(\rho, \theta, N)$. Форма дополнительных условий для $f_*^{(1)}$ очевидна.

В качестве апроксимации закона взаимодействия примем идеальный потенциальный барьер. Решаем задачу — о распределении в „далекой“ области, — минуя нахождение точного решения интегрального уравнения. Укажем лишь общий ход.

Вводим вместо $\mathbf{c}$ переменную $x = mc^2 / 2kT$ и в качестве искомой функции $u(x) = f_*^{(1)}(x) / \tau(x)$, где $f_*^{(1)}(x)\,dx$ дает число частиц со значениями x в интервале $(x, x + dx)$; $\tau(x)$ — среднее время, протекающее до ближайшего соударения.

Выполняя в (12) все возможные интегрирования, находим, что в области «больших» значений (критерием является неравенство $e^{-x} \ll 1$) удовлетворяется с тем же приближением, что и в ([1]), равенство

$$u(x) = 2\int_0^\infty u(x')\,w(x', x)\,dx' + 2Nw(x_0, x), \tag{17}$$

где $w(x', x)$ — вероятности перехода, определенные в ([1]). Некоторое частное решение (12) удовлетворяет (в той же области $e^{-x} \ll 1$) приближенному дифференциальному уравнению (18), получаемому из (17) двукратным дифференцированием

$$u''(x) + u'(x) + 2\frac{u(x)}{x + {}^1/_2} = 0. \tag{18}$$

Из общего решения (18) и дополнительных условий — поведение в $+\infty$, условия разрыва в точке $x_0 = mc_0^2 / 2kT$,

$$u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0); \quad u'(x_0 - 0) - u'(x_0 + 0) = \frac{2N}{x_0 + {}^1/_2}, \tag{19}$$

можно построить искомое решение, пользуясь также аддитивными решениями однородного интегрального уравнения.

Окончательный результат для полной функции распределения в области „далеких“ энергий принимает вид:

$$f_-(x) = \{\rho_0 + BI(x)(x - {}^3/_2)\} f^0(x) \quad (x < x_0); \tag{20}$$

$$f_+(x) = \{\rho_0 + BI(x_0)(x - {}^3/_2)\} f^0(x) \quad (x > x_0), \tag{20'}$$

где ρ_0 — полное число частиц (максвелловски распределенных);

$$I(x) = \int_\eta^x \frac{e^x\,dx}{(x + {}^1/_2)^2 (x - {}^3/_2)^2}; \tag{21}$$

η — некоторая постоянная, близкая к 2, и

$$B = \frac{N\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi kT}\, D^2 \rho_0}; \tag{22}$$

D — диаметр частиц; $f^0(x)$ — максвелловское распределение, нормированное к единице. Кроме того, $n_0 = N\tau(x_0)$.

Как видим, в противоположность задаче о распределении частиц — продуктов реакции ([1]), распределение всюду немаксвелловское.

Изложенный способ решения может быть распространен на многокомпонентные системы (различные массы и размеры частиц).

Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. В. Ступоченко, ДАН, 67, № 3 (1949). [2] S. Chapman and T. Couling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, 1939. [3] Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, 1946.