Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

О ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С РЕГУЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 VI 1949)

Поверхность F мы будем называть регулярной (аналитической), если в окрестности каждой ее точки можно ввести координаты u, v так, что радиус вектор точки поверхности как функция этих координат является регулярной (аналитической) функцией. Мы будем говорить, что поверхность F имеет регулярную (аналитическую) метрику, если в окрестности каждой точки на поверхности можно ввести координаты так, что коэффициенты квадратичной формы

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2$$

линейного элемента поверхности — суть регулярные (аналитические) функции координат u, v.

Если поверхность F регулярна (k раз дифференцируема), то она, очевидно, имеет регулярную (по крайней мере $k-1$ раз дифференцируемую) метрику.

Допустим теперь, что метрика поверхности регулярна. Что можно сказать о регулярности? К решению этого вопроса сводятся многие важные проблемы теории поверхностей, например, проблема изгибания.

Пусть F — выпуклая аналитическая поверхность с положительной кривизной и ограничивающая эту поверхность кривая γ имеет неотрицательную геодезическую кривизну. Вопрос об изгибании поверхности F в классе выпуклых поверхностей решается тривиальным образом с помощью теоремы о „склеивании“ А. Д. Александрова. В самом деле, возьмем какую-нибудь выпуклую плоскую область G, ограниченную кривой такой же длины, как и γ. Для поверхностей F и G выполнены условия теоремы о „склеивании“ и, следовательно, существует замкнутая выпуклая поверхность $\bar{F}$, состоящая из двух частей, одна из которых изометрична F, а другая G. Отсюда следует, что в классе выпуклых поверхностей поверхность F допускает изгибание с большой степенью произвола.

К сожалению, метод А. Д. Александрова не дает возможности сделать какие-либо заключения о регулярности той части поверхности $\bar{F}$, которая изометрична F, кроме гладкости. Эти заключения можно сделать, благодаря следующей теореме.

Теорема 1. *Если выпуклая поверхность имеет регулярную метрику и положительную гауссову кривизну, то она регулярна. Более точно, если метрика поверхности k раз дифференцируема*

($k \geqslant 5$), то поверхность по крайней мере $k-2$ раза дифференцируема. Если метрика выпуклой поверхности с положительной кривизной аналитическая, то поверхность аналитическая.

Простым следствием теоремы 1 являются:

Теорема 2. *Если выпуклая поверхность F k раз дифференцируема ($k \geqslant 5$) и имеет положительную кривизну, то каждая выпуклая поверхность, изометричная ей, по крайней мере $k-3$ раза дифференцируема. Если же поверхность F аналитическая, то любая изометрцчная ей выпуклая поверхность аналитическая.*

Теорема 3. *Если в области G плоскости u, v задана регулярная метрика положительной кривизны квадратичной формой*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

то каждая точка (u_0, v_0) области G имеет окрестность, в которой заданную метрику можно реализовать некоторой регулярной выпуклой поверхностью. Именно, если коэффициенты E, F, G k раз дифференцируемы ($k \geqslant 5$), то радиус-вектор поверхности дифференцируем по крайней мере $k-2$ раза.

Теорема 4. *Если F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые поверхности с регулярной, k раз дифференцируемой метрикой ($k \geqslant 5$) и положительной кривизной, O_1 и O_2 — две соответствующие по изометрии точки этих поверхностей, то каждую достаточно малую окрестность ω_1 точки O_1 на поверхности F_1 можно непрерывно изогнуть в соответствующую по изометрии окрестность ω_2 точки O_2, причем во все время изгибания поверхность ω_1 будет по крайней мере $k-2$ раза дифференцируемой поверхностью. В частности, если поверхность F_1 аналитическая, то изгибание будет аналитическим.*

Благодаря теореме 1 метод „склеивания“ А. Д. Александрова в применении к поверхностям с регулярной метрикой является методом классической дифференциальной геометрии и позволяет решать достаточно просто многие ее задачи, в частности, задачу изгибания, как показано выше.

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на следующие два предложения, представляющие и самостоятельный интерес.

Теорема 5. *Пусть $\bar{F}$ — выпуклая регулярная шапочка (так называют выпуклую поверхность с плоским краем, однозначно проектирующуюся на плоскость края). Пусть ее метрика задается квадратичной формой*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2;$$

$r(u, v)$ — радиус-вектор точки с координатами u, v.

Тогда может быть указан верхний предел модулей вторых производных вектор-функции $r(u, v)$ в зависимости только от верхней грани модулей производных функций E, F, G на $\bar{F}$ до четвертого порядка, максимума функций $\frac{1}{K(u,v)}$, где $K(u, v)$ — гауссова кривизна поверхности, и расстояния точки, в которой оцениваются вторые производные функции $r(u, v)$, от плоскости края шапочки $\bar{F}$.

Эта теорема доказывается путем исследования уравнения Монжа — Ампера эллиптического типа, которому удовлетворяют компоненты вектора $r(u, v)$ как функции u, v.

Теорема 6. *Пусть $F(r, s, t, p, q, z, x, y)=0$ — регулярное уравнение в частных производных эллиптического типа, т. е. F — регулярная функция своих аргументов; $z=f(x, y)$ — регулярное решение этого уравнения в области G. Тогда для производных k-го порядка функции $f(x, y)$ $(k \geqslant 3)$ в любой точке (x_0, y_0) области G может быть указан верхний предел их модуля, в зависимости только от верхней грани модулей производных функции $f(x, y)$ до второго порядка включительно в области G, верхней грани модулей производных до k-го порядка функции F по ее аргументам, если вместо этих аргументов после вычисления производных подставить: $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots, \quad q=\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad z=f(x, y)$, верхней грани величины $1 \Big/ \left(4 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t}-\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2\right)$ и расстояния точки (x_0, y_0) от границы области G.*

При доказательстве этой теоремы применяется некоторая модификация метода вспомогательных функций С. Н. Бернштейна.

Идея доказательства теоремы 1 в общих чертах состоит в следующем. Пусть F — выпуклая поверхность, метрика которой, например, аналитическая, а кривизна везде больше нуля. Докажем аналитичность поверхности F в окрестности произвольной ее точки O. Для этого сместим касательную плоскость к поверхности F в точке O в сторону поверхности на малое расстояние h. При этом она отсекает от поверхности F малую шапочку ω. Введем на поверхности F в окрестности точки O аналитическую координатную сеть u, v так, чтобы она покрывала область ω.

Кривая γ, ограничивающая область ω, выпуклая. Построим близкую γ аналитическую кривую $\bar{\gamma}$ с положительной всюду геодезической кривизной. Пусть $\bar{\omega}$ — ограничиваемая ею область на поверхности.

После этого на единичной сфере мы задаем аналитическую метрику M_n так, что выполняются следующие условия:

1) Существует гомеоморфизм области $\bar{\omega}$ на некоторую область σ_n единичной сферы. Если в области σ_n ввести координаты u, v, беря в качестве координат произвольной точки X координаты u, v соответствующей точки на $\bar{\omega}$, то линейный элемент ds_n^2 метрики M_n имеет вид

$$ds_n^2=E_n du^2+2 F_n du dv+G_n dv^2,$$

причем E_n, F_n, G_n в каждой области $\bar{\omega}$, содержащейся вместе с границей в области ω, сходятся равномерно к E, F, G вместе с их производными до шестого порядка (E, F, G — коэффициенты квадратичной формы ds^2 — линейного элемента поверхности F).

2) Область ω_n, соответствующая σ_n, на аналитической замкнутой выпуклой поверхности F_n, реализующей метрику M_n, при неограниченном возрастании n и приближении кривой $\bar{\gamma}$ к γ сходится к выпуклой шапочке, а остальная часть поверхности F_n сходится к бесконечному полуцилиндру с образующими, перпендикулярными плоскости края шапочки.

В силу доказанной нами ранее теоремы об однозначной определенности шапочек можно считать, что аналитические поверхности ω_n сходятся к ω.

Пусть теперь $r(u, v)$ и $r_n(u, v)$ — радиусы-векторы точек поверхностей ω и ω_n с одинаковыми координатами. Тогда при $n \rightarrow \infty$ $r_n(u, v) \rightarrow r(u, v)$ в силу сходимости поверхностей ω_n к ω и сходимости метрик этих поверхностей к метрике ω. Далее, с помощью теорем 5 и 6 легко дать оценки модулей производных r_n (u, v) в области $\bar{\omega}$

переменных u, v, которая вместе с границей расположена на шапочке ω, не зависящие от n. Но тогда, очевидно, функция $r(u, v)$, как предел функции $r_n(u, v)$, по крайней мере трижды непрерывно дифференцируема.

После этого из теоремы С. Н. Бернштейна об аналитичности решений аналитических уравнений эллиптического типа заключаем, что поверхность F аналитическая.

Поступило
19 V 1949