Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. МЕНЬШОВ

О РЯДАХ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ И СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 14 VI 1949)

Если задана какая-нибудь функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$, то, как известно, ее можно изменить на множество сколь угодно малой меры таким образом, чтобы для полученной новой функции ряд Фурье сходился равномерно на $[-\pi, \pi]$ (1). В этой теореме множество E, на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит вообще от вида этой функции.

Несколько видоизменяя доказательство только что формулированной теоремы, можно, однако, получить более общее утверждение, а именно, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для любой положительной неубывающей функции $\rho(\delta)$ положительного аргумента δ, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{\delta \to +0} \rho(\delta)=0$, и для любого положительного числа ε существует измеримое множество E, обладающее свойствами:*

a) $\operatorname{mes} E < \varepsilon, \quad E \subset [-\pi, \pi]$;

b) *любую функцию $f(x)$, непрерывную на сегменте $[-\pi, \pi]$, модуль непрерывности которой на этом сегменте не превосходит $\rho(\delta)$, можно изменить на множестве E таким образом, чтобы для полученной новой функции ряд Фурье сходился равномерно на $[-\pi, \pi]$.*

Из теоремы 1 следует, что в теореме, формулированной в начале заметки, множество E можно считать зависящим только от числа ε и от модуля непрерывности функции $f(x)$, но не от структуры этой функции.

Возникает вопрос, нельзя ли множество E, на котором происходит изменение функции $f(x)$, считать зависящим только от числа ε, но не зависящим от модуля непрерывности функции.

Можно доказать, что дальнейшее усиление теоремы 1 невозможно; а именно, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Для любого совершенного множества P положительной меры, лежащего на $[-\pi, \pi]$, и для любой точки плотности x_0 этого множества можно определить функцию $f(x)$, непрерывную на $[-\pi, \pi]$ и обладающую следующим свойством:*

Какова бы ни была функция $\psi(x)$, ограниченная и измеримая на $[-\pi, \pi]$ и совпадающая с $f(x)$ на множестве P, ряд Фурье функции $\psi(x)$ расходится в точке x_0.

Так как дополнение к множеству P относительно сегмента $[-\pi, \pi]$ может иметь сколь угодно малую меру, то из теоремы 2 следует, что теорему 1 нельзя усилить.

Возьмем теперь произвольное совершенное нигде не плотное множество P, расположенное на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Возникает вопрос, можно ли любую функцию $f(x)$, непрерывную на $[-\pi, \pi]$, изменить вне множества P таким образом, чтобы для полученной новой непрерывной функции $\psi(x)$ ряд Фурье сходился почти всюду.

Этот вопрос остается до сих пор не решенным, даже если мы ограничимся требованием, чтобы $\psi(x)$ была измеримой функцией с суммируемым квадратом на $[-\pi, \pi]$.

В самом деле, Г. П. Толстов доказал, что существует на сегменте $[-\pi, \pi]$ совершенное нигде не плотное множество P_0 положительной меры, обладающее следующим свойством. Каковы бы ни были измеримые функции $f(x)$ и $\psi(x)$ с суммируемым квадратом на $[-\pi, \pi]$, совпадающие на множестве P_0, почти всюду на этом множестве ряды Фурье функций $f(x)$ и $\psi(x)$ или одновременно сходятся или одновременно расходятся ([2]).

Таким образом, если на некотором множестве E положительной меры, расположенном на P_0, ряд Фурье от непрерывной функции $f(x)$ расходится, то при любом изменении функции $f(x)$ вне множества P_0 ряд Фурье полученной новой функции $\psi(x)$ будет расходиться почти всюду на том же множестве E при условии, что $\psi(x)$ есть измеримая функция с суммируемым квадратом на $[-\pi, \pi]$. Отсюда следует, что поставленный выше вопрос равносилен вопросу о сходимости почти всюду рядов Фурье от непрерывных функций.

Однако можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Какова бы ни была функция $f(x)$, суммируемая на сегменте $[-\pi, \pi]$, и каково бы ни было совершенное нигде не плотное множество P, расположенное на том же сегменте, всегда можно изменить функцию $f(x)$ вне множества P таким образом, чтобы для полученной новой суммируемой функции $\psi(x)$ ряд Фурье сходился почти всюду на $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство теоремы 3 опирается на следующие леммы.

Лемма А. *Возьмем произвольное действительное число c_0, произвольные положительные числа δ и δ', удовлетворяющие условию $\delta' \leqslant \delta$, и произвольные натуральные числа $p > 2$ и $\nu > 8$.*

Положим

$$c_s = c_0 + \delta\nu s, \qquad a_s = c_s - \delta',$$

$$b_s = c_s + 2\delta, \qquad a'_s = c_s - 2\delta,$$

где $s = 1, 2, \ldots, p\nu$.

Тогда

$$\left| \sum_{s=1}^{p\nu} \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x}\, dt \right| < L\frac{\delta'}{\delta}$$

для любых натуральных чисел n и для любых точек x множества $\sum_{s=p+1}^{p(\nu-1)} [b_{s-1}, a'_s]$, где L есть абсолютная постоянная.

Лемма В. *Пусть заданы: сегмент $[c, d]$, действительное число γ, положительное число ε, натуральное число $\nu > 8$ и замкнутое нигде не плотное множество $\Pi \subset [c, d]$.*

Тогда можно определить функцию $\psi(x)$ и измеримое множество E, которые обладают следующими свойствами:

a) $\psi(x)$ *постоянна по отрезкам на сегменте* $[c, d]$ *;

b) $$\int_c^d |\psi(t)|\, dt \leqslant 2\,|\gamma|\,(d-c);$$

c) $$\left|\int_{c'}^{d'} \psi(t)\, dt\right| < \varepsilon$$

для любого сегмента $[c', d'] \subset [c, d]$;

d) $$\left|\int_c^d \psi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x}\, dt\right| \leqslant B\nu\,|\gamma|$$

для любого натурального числа n *и для любой точки* $x \in E$, *где* B — *абсолютная постоянная*;

e) $$\psi(x) = \gamma$$

для любой точки $x \in \Pi$;

f) $$\operatorname{mes} E > (d-c)\left(1 - \frac{8}{\nu}\right), \qquad E \subset [c, d].$$

Поступило
7 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Меньшов, ДАН, **32**, 245 (1941); Матем. сб., **11** (53), 67 (1942). [2] Г. Толстов, Матем. сб., **10** (52), 249 (1942).

* Функцию $\psi(x)$ мы будем называть постоянной по отрезкам на сегменте $[c, d]$, если этот сегмент можно разбить на конечное число не перекрывающихся сегментов, внутри каждого из которых $\psi(x)$ постоянна.