Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 4

ФИЗИКА

Э. М. ЛИПМАНОВ

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СООТНОШЕНИЯХ И ИСКЛЮЧЕНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МЕЗОННОГО ПОЛЯ

(Представлено академиком В. А. Фоком 2 VI 1949)

„Каноническая" схема квантования, данная Гейзенбергом и Паули (1), может быть представлена по существу следующим правилом квантования. Классическое уравнение поля, скажем для простоты, для действительного скаляра поля ψ

$$(\Box - \mu^2)\psi = 0 \tag{1}$$

решается в общем виде в виде интеграла Фурье*

$$\psi = (2\pi)^{-3/2}\int\frac{d^3k}{k_0}\left\{\varphi(\bar{k})\, e^{i(k_\alpha x_\alpha)} + \varphi^*(\bar{k})\, e^{-i(k_\alpha x_\alpha)}\right\}, \tag{2}$$

где

$$k_\alpha = (\bar{k}, k_4), \quad k_4 = ik_0, \quad k_0 = \sqrt{\bar{k}^2 + \mu^2}.$$

Квантование состоит в том, что амплитуды Фурье $\varphi(\bar{k})$ и $\varphi^*(\bar{k})$ рассматриваются как операторы, подчиненные „каноническим" квантовым условиям** :

$$[\varphi(\bar{k}),\ \varphi^*(\bar{k}')] = \frac{1}{2}\, k_0\, \delta(\bar{k} - \bar{k}'). \tag{3}$$

Естественное обобщение этой схемы на векторные поля должно было бы состоять в том, чтобы компоненты вектора квантовать как независимые скаляры. Однако в действительности компоненты векторного поля не независимы, а подчинены известному, связывающему их, дополнительному условию, которое в квантовой теории вступает в противоречие с „каноническими" перестановочными соотношениями***.

Следующие два условия являются достаточными для того, чтобы однозначно произвести квантование в этом случае:

1) релятивистская инвариантность квантования;

2) „канонические" перестановочные соотношения между независимыми компонентами.

---

* По дважды встречающимся значкам производится суммирование: по греческим 1, 2, 3, 4; по римским 1, 2, 3.

** Мы пользуемся естественными единицами $\hbar = c = 1$.

*** Отметим, что, ввиду $\mu \neq 0$, дополнительное условие нельзя принять в качестве условия для функционала.

Рассмотрим комплексное векторное мезонное поле: ψ_ν, ψ_ν^*. Представляем его двумя действительными векторными полями:

$$\psi_\nu^r, \quad \text{где } r = 1, 2.$$

Классические уравнения поля:

$$(\Box - \mu^2)\,\psi_\nu^r = 0, \quad \frac{\partial \psi_\nu^r}{\partial x_\nu} = 0. \tag{4}$$

Общее решение классических уравнений движения:

$$\psi_\nu^r = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{k_0} \left\{ \varphi_\nu^r(\bar{k})\, e^{i(k_\alpha x_\alpha)} + \varphi_\nu^{r*}(\bar{k})\, e^{-i(k_\alpha x_\alpha)} \right\}. \tag{5}$$

Дополнительное условие в k-пространстве:

$$(k_\nu \varphi_\nu^r(\bar{k})) = (k_\nu \varphi_\nu^{r*}(\bar{k})) = 0. \tag{6}$$

В силу того, что k_ν есть времени подобный вектор*, выбираем координатную систему так, чтобы:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0, \quad k_4 = i\mu. \tag{7}$$

Условия (6) тогда дают:

$$\varphi_4^r = \varphi_4^{r*} = 0, \quad \varphi_i^r \text{ — произвольны.} \tag{6'}$$

Переходим к квантованию**.

Так как $d^3k \,/\, k_0$ является скаляром, то $\varphi_\nu^r(\bar{k}), \varphi_\nu^{r*}(\bar{k})$ являются векторами.

Требование релятивистской инвариантности дает:

$$[\varphi_\nu^r(\bar{k}),\, \varphi_\mu^{s*}(\bar{k}')] = \frac{1}{2}\,\delta_{rs}\, A_{\nu\mu}, \tag{8}$$

где $A_{\nu\mu}$ является тензором.

В выбранной координатной системе (7), благодаря условиям (6') и учтя второе условие квантования, имеем для $A_{\nu\mu}$:

$$A_{\mu 4} = A_{4\mu} = 0, \quad A_{ij} = k_0\, \delta_{ij}\, \delta(\bar{k} - \bar{k}'). \tag{9}$$

Этим у нас определен тензор $A_{\nu\mu}$ в системе координат, где „мезон покоится“.

Произведя общее преобразование Лоренца и учитывая, что $\beta = u \,/\, c = k \,/\, k_0$, получаем перестановочные соотношения для амплитуд векторного мезонного поля в виде:

$$[\varphi_\nu^r(\bar{k}),\, \varphi_\mu^{s*}(\bar{k}')] = \frac{1}{2}\, k_0 \delta_{rs}\, \delta(\bar{k} - \bar{k}') \left(\delta_{\nu\mu} + \frac{k_\nu k_\mu}{\mu^2}\right). \tag{10}$$

---

* Эти рассуждения верны лишь в случае $\mu \neq 0$.

** В квантовой теории величины φ_ν^r, φ_ν^{r*} считаем эрмитово-сопряженными операторами.

Благодаря (10) условия (6) можно считать операторными равенствами. Лагранжиан поля выбираем в виде $\overline{L} = \int L\,dv$,

$$L = -\frac{1}{2}\left[\mu^2 (\psi_\alpha^r)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\alpha^r}{\partial x_\beta}\right)^2\right]. \tag{11}$$

$\overline{L}$ совпадает с обычно употребляемым лагранжианом благодаря тому, что дополнительное условие обращено в тождество. Гамильтониан поля есть $\overline{H} = \int H\,dv$, где $H = p_\nu^r \dot{\psi}_\nu^r - L$ и p_ν^r — импульсы поля.

Представляя поле в виде разложений (5), получаем:

$$\overline{H} = \int (\varphi_\nu^r \varphi_\nu^{r*} + \varphi_\nu^{r*} \varphi_\nu^r)\, d^3 k, \tag{12}$$

где по r суммируется 1, 2.

Перестановки (10), отличаясь по форме от „канонических“, могут оказаться в ряде случаев неудобными. Это обстоятельство можно обойти следующим образом.

Дополнительные условия (6) мы решаем относительно φ_4^r и φ_4^{r*} и подставляем в (12):

$$\overline{H} = \int \left[\varphi_i^r \varphi_i^{r*} + \varphi_i^{r*} \varphi_i^r - \frac{k_i k_j}{k_0^2}(\varphi_i^r \varphi_j^{r*} + \varphi_j^{r*} \varphi_i^r)\right] d^3 k.$$

Введем теперь новые операторы*:

$$\mathring{\varphi}_i^r = \varphi_i^r - \frac{k_i k_j}{k^2}\left(1 - \frac{\mu}{k_0}\right)\varphi_j^r, \text{ где } k^2 = k_i^2. \tag{13}$$

Гамильтониан принимает вид:

$$\overline{H} = \int (\mathring{\varphi}_i^r \mathring{\varphi}_i^{r*} + \mathring{\varphi}_i^{r*} \mathring{\varphi}_i^r)\, d^3 k. \tag{14}$$

Перестановочные соотношения для новых операторов имеют уже „канонический“ вид:

$$\left[\mathring{\varphi}_i^r (\overline{k}),\ \mathring{\varphi}_j^{s*} (\overline{k}')\right] = \frac{1}{2} k_0 \delta_{rs} \delta_{ij} \delta(\overline{k} - \overline{k}'). \tag{15}$$

---

* Нужно отметить, что операторы $\mathring{\varphi}_i^r$, $\mathring{\varphi}_i^{r*}$ нельзя считать операторами испускания и поглощения заряженных частиц, ибо, при обычном выборе матриц для них, приводятся к диагональному виду энергии и импульс, но не заряд поля. Чтобы сделать диагональными и энергию, и импульс, и заряд поля одновременно, надо от операторов $\mathring{\varphi}_i^r$, $\mathring{\varphi}_i^{r*}$ перейти к новым по формулам:

$$\begin{aligned} &\mathring{\varphi}_i^1 (\overline{k}) = \frac{\sqrt{k_0}}{2}[b_i(-\overline{k}) - a_i(\overline{k})], \quad \mathring{\varphi}_i^{1*} (\overline{k}) = \frac{\sqrt{k_0}}{2}[b_i^*(-\overline{k}) - a_i^*(\overline{k})]; \\ &\mathring{\varphi}_i^2 (\overline{k}) = i\frac{\sqrt{k_0}}{2}[b_i(-\overline{k}) + a_i(\overline{k})], \quad \mathring{\varphi}_i^{2*} (\overline{k}) = -i\frac{\sqrt{k_0}}{2}[b_i^*(-\overline{k} + a_i^*(\overline{k})], \end{aligned} \tag{16}$$

где a b_i, a_i^*, b_i^* суть операторы поглощения и испускания положительных мезонов соответственно и представляются известными матрицами.

Из выражения (13) видно, что поперечные части $\overset{\circ}{\varphi}{}_i^r$, $\overset{\circ}{\varphi}{}_i^{r*}$ и φ_i^r, φ_i^{r*} равны, а продольные отличаются численным множителем*:

$$\overset{\circ}{\varphi}{}_i^{r\,\mathrm{tr}} = \varphi_i^{r\,\mathrm{tr}}, \qquad \overset{\circ}{\varphi}{}_i^{r\,\mathrm{long}} = \frac{\mu}{k_0}\varphi_i^{r\,\mathrm{long}}. \tag{17}$$

Таким образом, оставшиеся операторы представляют поперечные и продольные колебания мезонного поля или операторы испускания и поглощения поперечных и продольных мезонов.

Эта формулировка теории дает возможность применить к поперечным и продольным мезонам дираковскую теорию излучения, как в квантовой электродинамике.

Из изложенного ясна релятивистская инвариантность квантования.

Приведенная формулировка теории гораздо проще, чем те, которые имеются в литературе [2], не уступая последним в общности.

В заключение выражаю благодарность акад. В. А. Фоку за ряд критических замечаний.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Heisenberg u. W. Pauli, Zs. f. Phys., 56, 1 (1929). [2] Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, 1947.

* Это отличие продольных мезонов от поперечных показывает влияние исключенного нами добавочного условия и приводит к тому, что в крайнем релятивистском случае можно пренебречь всеми эффектами, связанными с продольными мезонами, и мы приближаемся к положению, имеющему место в электродинамике.