Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. КУБИЛЮС

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА И. М. ВИНОГРАДОВА К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 VI 1949)

В 1932 г. К. Малером ([1]) в связи с введенной им классификацией чисел было высказано следующее предположение.

Пусть $s \geqslant 1$—целое рациональное число, c — любая положительная постоянная. Для почти всех вещественных θ, т. е. всех, за исключением множества меры нуль, неравенство

$$\left| \sum_{\sigma=0}^{s} a_\sigma \theta^\sigma \right| < c a^{-(1+\omega)s}, \quad a = \max_{\sigma=0,1,\ldots,s} |a_\sigma|, \tag{1}$$

имеет не больше конечного числа решений в целых рациональных $a_0, a_1, \ldots, a_s$ при сколь угодно малом фиксированном положительном ω.*

Малер оценку (1) доказал лишь для $\omega \geqslant 3$. И. Ф. Коксма ([2]) улучшил результат Малера, показав его справедливость для $\omega \geqslant 2$. Предположение в случае $s = 1$ является тривиальным следствием одной теоремы А. Я. Хинчина ([3]).

В настоящей заметке, применяя метод акад. И. М. Виноградова, я доказываю предположение Малера в случае $s = 2$ для любого $\omega > 0$.

Доказательство основано на двух леммах, вторая из которых имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $q > 0$, $n \neq 0$ — целые рациональные числа, $(2n, q) = d$, θ — вещественное число.*

Тогда

$$\sum_{x=1}^{q-1} e^{2\pi i n \left(\frac{x^2}{q} + 2x\theta\right)} \ll \sqrt{dq \log q}\,.$$

Доказательство. Помножаем сумму на сопряженную с ней величину и применяем леммы ([4]) 6 и 8[a], гл. I.

Лемма 2. *Пусть $\varphi(q)$ — положительная, монотонно убывающая функция целочисленного аргумента $q \geqslant q_0 > 0$ такая, что ряд*

$$\sum_{q \geqslant q_0} q^{1/2} \varphi(q) \tau(q) \log^{3/2} q, \tag{2}$$

где $\tau(q)$ — число делителей числа q, сходится.

* Легко доказать, что ω не может быть отрицательным.

Тогда система неравенств

$$\left|\theta - \frac{p_1}{q}\right| < \varphi(q),$$
$$\left|\theta^2 - \frac{p_2}{q}\right| < \varphi(q) \tag{3}$$

для почти всех θ имеет по крайней мере не больше конечного числа решений в целых рациональных p_1, p_2; $q > 0$.

Доказательство. Лемму достаточно доказать для числа интервала (0, 1). Очевидно, что лемма будет доказана полностью, если мы убедимся в ее справедливости для функции $\varphi(q)$, удовлетворяющей следующим ограничениям

$$\varphi(q) = O(q^{-3/2}),$$
$$q^{-2} = O(\varphi(q)).$$

Положим, что ряд (2) сходится. Пусть q — достаточно большое натуральное число, $Q = Q(q)$ — система интервалов

$$(0, \varphi(q)), \quad \left(\frac{1}{q} - \varphi(q), \frac{1}{q} + \varphi(q)\right), \ldots, \left(\frac{p}{q} - \varphi(q), \frac{p}{q} + \varphi(q)\right), \ldots$$
$$\ldots, \left(\frac{q-1}{q} - \varphi(q), \frac{q-1}{q} + \varphi(q)\right), \quad (1 - \varphi(q), 1).$$

Далее, пусть $E(q)$ — множество чисел θ, обладающих тем свойством, что θ и θ^2 одновременно принадлежат множеству $Q(q)$. Оценим меру множества $E(q)$. Для этого построим периодическую с периодом $\frac{1}{q}$ функцию $f(x)$ (([4]), гл. I, лемма 12):

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ в интервале } \frac{p}{q} - \varphi(q) \leqslant x \leqslant \frac{p}{q} + \varphi(q), \\ 0 \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad \frac{p}{q} + \varphi(q) + \frac{1}{q^2} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{q} - \varphi(q) - \frac{1}{q^2}, \\ q^2\left(x - \frac{p}{q} + \varphi(q) + \frac{1}{q^2}\right) \text{ в интервале} \\ \qquad \frac{p}{q} - \varphi(q) - \frac{1}{q^2} \leqslant x \leqslant \frac{p}{q} - \varphi(q), \\ -q^2\left(x - \frac{p}{q} - \varphi(q) - \frac{1}{q^2}\right) \text{ в интервале} \\ \qquad \frac{p}{q} + \varphi(q) \leqslant x \leqslant \frac{p}{q} + \varphi(q) + \frac{1}{q^2}, \end{cases}$$

где p пробегает все целые рациональные значения. Наша функция разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2\pi q n x,$$

причем имеют место следующие оценки коэффициентов:

$$a_0 \ll q\varphi(q),$$
$$a_n \ll \frac{1}{n}, \quad \text{если } n \leqslant q, \tag{4}$$
$$a_n \ll \frac{q}{n^2}, \quad \text{если } n > q.$$

Пусть $\psi(x)$ — характеристическая функция множества $Q(q)$. Тогда мера множества $E(q)$

$$\mathrm{M}\,E(q)=\int_0^1 \psi(x)\psi(x^2)\,dx=\int_{(Q)}\psi(x^2)\,dx\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(Q)}\cos 2\pi qnx^2\,dx.$$

В силу леммы 1, при $n\neq 0$

$$\int_{(Q)}\cos 2\pi qnx^2\,dx=O(\varphi(q))+\sum_{p=1}^{q-1}\int_{-\varphi(q)}^{\varphi(q)}\cos 2\pi qn\left(\frac{p}{q}+x\right)^2 dx\ll$$

$$\ll d^{1/2}q^{1/2}\varphi(q)\log^{1/2}q,$$

следовательно,

$$\mathrm{M}\,E(q)\ll q^{1/2}\varphi(q)\log^{1/2}q\sum_{d/q}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\(2n,\,q)=d}}d^{1/2}\,|a_n|\,.$$

Разлагая сначала сумму на две суммы: одну по всем n, для которых $(2n, q)=1$, и вторую по тем n, для которых $(2n, q)=d$, $d>1$ *, а затем каждую сумму еще на две: одну по $n\leqslant q$ и другую по $n>q$, и принимая во внимание оценки величин a_n (4), будем иметь

$$\mathrm{M}\,E(q)\ll q^{1/2}\varphi(q)\log^{3/2}q\sum_{d/q}\frac{1}{d^{1/2}}\ll q^{1/2}\varphi(q)\,\tau(q)\log^{3/2}q.$$

Обозначим через $F(q)$ сумму множеств $E(q)$, $E(q+1),\ldots$ Мера множества $F(q)$

$$\mathrm{M}\,F(q)\ll\sum_{r=q}^{\infty}r^{1/2}\varphi(r)\,\tau(r)\log^{3/2}r.$$

Если число θ обладает свойством, что система (3) имеет бесконечно много решений, то оно должно принадлежать бесконечному числу множеств $E(q)$, следовательно, множеству $F(q)$ при сколь угодно большом q. Ввиду сходимости ряда (2) мера множества таких чисел $<\eta$, где η — сколь угодно малое положительное число, т. е. она равна нулю.

Доказательство предположения Малера в случае $s=2$. Для доказательства воспользуемся одной теоремой А. Я. Хинчина ([5], [6]). Из этой теоремы как следствие вытекает следующее предложение:

Если неравенство

$$|\,a_1\theta^2+a_2\theta+a_3\,|<ca^{-2(1+\omega)},\quad a=\max_{\sigma=1,\,2,\,3}|\,a_\sigma\,|\,,\tag{5}$$

имеет бесконечно много решений в целых рациональных a_1, a_2, a_3, *то система неравенств*

$$\left.\begin{aligned}&\left|\,\theta-\frac{p_1}{q}\,\right|<c_1q^{-1-\frac{1+\omega}{2+\omega}}\\&\left|\,\theta^2-\frac{p_2}{q}\,\right|<c_1q^{-1-\frac{1+\omega}{2+\omega}}\end{aligned}\right.\tag{6}$$

---

* Это соображение указано мне проф. Ю. В. Линником.

при некотором c_1, *причем* $c_1 < \max(2, 2c) = c_2$ *при* $\omega \geqslant 0$, *имеет бесконечно много решений в целых рациональных* $p_1, p_2; q > 0$.

Пусть множество вещественных чисел θ, для которых неравенство (5), соотв. (6), имеет бесконечно много решений, будет $E_L(c, \omega)$, соотв. $E_S(c_1, \omega)$.

Ясно, что

$$E_L(c, \omega) \subset E_S(c_2, \omega). \tag{7}$$

Применим лемму 2 к функции $c_2 q^{-1-\frac{1+\omega}{2+\omega}}$. Ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1-\frac{\omega}{2(2+\omega)}} \tau(q) \log^{3/2} q,$$

ввиду $\tau(q) \ll q^{\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое положительное число, сходится при любом положительном ω. Из (7) и леммы 2 следует наше утверждение.

Поступило
26 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Mahler, Math. Ann., 106, 131 (1932). [2] J. F. Koksma, Monatshefte f. Math. u. Phys., 48, 176 (1939). [3] А. Хинчин, Math. Ann., 92, 115 (1924). [4] И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 1947. [5] А. Хинчин, Rend. Circ. math. Palermo, 50, 170 (1926). [6] K. Mahler, Мат. сб., 5, 1 (43) : 6 (1936).