Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

О СУММАХ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 VI 1949)

Для суммы дробных долей линейной функции при иррациональном α имеет место оценка

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P). \tag{1}$$

В работах А. Я. Хинчина ([1]) и Островского ([2]) показано, что для всех иррациональных α оценка (1) не может быть улучшена, однако, если откинуть величины α, принадлежащие некоторому множеству нулевой меры, то для каждого $\varepsilon > 0$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(\ln^{1+\varepsilon} P). \tag{2}$$

С другой стороны, дальнейшее значительное улучшение оценки (2) невозможно, так как почти для всех α

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = \Omega(\ln P). \tag{3}$$

Рассмотрим аналогичные вопросы для суммы $\sum\limits_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\}$, где q — целое ($q \geqslant 2$).

В случае дробных долей $\{\alpha x\}$ иррациональные числа $\alpha \in (0, 1)$ совпадают с множеством тех чисел интервала $(0, 1)$, для которых дробные доли функции αx равномерно распределены. Естественно и в случае дробных долей $\{\alpha q^x\}$ рассматривать множество A тех чисел $\alpha \in (0, 1)$, для которых функция αq^x равномерно распределена. (Как показал Вейль ([3]), мера множества A равна 1.)

Очевидно, что для всякого $\alpha \in A$ справедлива оценка, аналогичная (1):

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P). \tag{4}$$

Первая теорема настоящей работы показывает, что, как и в случае (1), для всех $\alpha \in A$ оценка (4) не может быть улучшена.

Теорема 1. *Какова бы ни была положительная функция* $\varepsilon(P)$, *для которой* $\lim\limits_{P\to\infty} \varepsilon(P) = 0$, *найдется* $\alpha \in A$ *такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(p \cdot \varepsilon(P)).$$

Доказательство этой теоремы опирается на вейлевский критерий равномерного распределения.

Во второй теореме рассматривается вопрос о величинах $\alpha \in A$, для которых сумма дробных долей $\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\}$ наиболее близка к своему среднему значению $P/2$.

Теорема 2. *Для всякой функции $\varphi(P)$, как угодно медленно стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании P, найдется $\alpha \in A$ такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)). \tag{5}$$

В случае линейной функции существуют иррациональные α такие, что

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2}\, O(\ln P). \tag{6}$$

Как показал Островский, оценка (6) не может быть улучшена ни для какого α. Из сравнения этого результата с оценкой (5) следует, что существуют величины α, для которых функция αq^x равномерно распределена ($\alpha \in A$) и сумма дробных долей несравненно меньше отклоняется от своего среднего значения, чем сумма дробных долей линейной функции.

Оценка (5) не может быть улучшена: для всякого $\alpha \in A$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(1).$$

Доказательство теоремы 2 основывается на применении систем $\rho_n(q)$, введенных в моей работе „О некоторых вопросах равномерного распределения“ при построении примеров величин α, принадлежащих множеству A. Один из параграфов этой работы посвящен обобщению систем $\rho_n(q)$ и содержит изложение метода, позволяющего построить каждую такую систему. (Существование систем $\rho_n(q)$ было доказано также Гудом ([4]).)

Далее рассматривается вопрос об отклонении суммы дробных долей $\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\}$ от среднего значения $P/2$ для всех α, за исключением некоторого множества нулевой меры.

В теореме 3 доказывается, что это отклонение близко к величине $R = \sqrt{P \ln \ln P}$ и, таким образом, значительно больше, чем для дробных долей линейной функции, где величина разности $\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2}$, согласно (2) и (3), характеризуется функцией $R_1 = \ln P$.

Оценки теоремы 3 легко получаются из одной метрической теоремы А. Я. Хинчина ([1]).

Поступило
9 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Math. Zs., **18** (1923). [2] A. Ostrowski, Abh. Hamb. Universität, 1 (1921). [3] H. Weyl, Math. Ann., **77** (1916). [4] I. J. Good, Journ. Lond. Math. Soc., **21**, 3, No. 83 (1946).