Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. С. ВИДЕНСКИЙ

О НЕРАВЕНСТВАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 18 VI 1949)

Рассматриваются многочлены $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие на отрезке $[-1, 1]$ неравенству

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{M_l^2(x) + (1-x^2)N_{l-1}^2(x)} \equiv$$
$$\equiv \sqrt{M_n^2(x) + (1-x^2)N_{n-1}^2(x)} \equiv \sqrt{H(x)}, \qquad (1)$$

где $M_l(x)$ и $N_{l-1}(x)$ — два действительные многочлена степени l $(l \leqslant n)$ и $l-1$ такие, что $M_l(x) > 0$ и $N_{l-1}(x) > 0$ при $x > 1$, причем нули обоих многочленов лежат на отрезке $[-1, 1]$ и взаимно разделены. $M_n(x)$ и $N_{n-1}(x)$ — действительные многочлены степени n и $n-1$, связанные с $M_l(x)$ и $N_{l-1}(x)$ соотношением:

$$M_n(x) \pm i\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x) =$$
$$= (T_{n-l}(x) + iS_{n-l}(x))\,(M_l(x) + i\sqrt{1-x^2}\,N_{l-1}(x)),$$

где $T_{n-l}(x) = \cos(n-l)\arccos x$, $S_{n-l}(x) = \sin(n-l)\arccos x$.

Нули многочленов $M_n(x)$ и $N_{n-1}(x)$ лежат на отрезке $[-1, 1]$ и взаимно разделены. С. Н. Бернштейн показал в работе [1], что если многочлен $P_n(x)$ удовлетворяет неравенству (1), то

$$|P_n'(x)| \leqslant \sqrt{\left[\frac{d}{dx}M_n(x)\right]^2 + \left[\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\right\}\right]^2} \equiv$$
$$\equiv \sqrt{H_1(x)}, \quad -1 < x < 1. \qquad (2)$$

Основной результат этой заметки состоит в распространении неравенства (2) на производные порядка k $(k = 2, 3, \ldots, n)$. Именно, получаем:

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \sqrt{\left[\frac{d^k}{dx^k}M_n(x)\right]^2 + \left[\frac{d^k}{dx^k}\left\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\right\}\right]^2} \equiv$$
$$\equiv \sqrt{H_k(x)}, \quad -1 < x < 1, \qquad (3)$$

равенство достигается только для многочлена $P_n(x) = \pm M_n(x)$.

При доказательстве этой теоремы существенно использован метод, примененный A. C. Schaeffer'ом и R. J. Duffin'ом ([2]), которые рассмотрели случай $l = 0$ $(H(x) = 1)$ и для него получили (3). Их рассуждения, однако, нужно несколько дополнить. В частности, приходится обобщить теорему В. А. Маркова ([3]) о многочленах, нули которых взаимно разделены.

Лемма 1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две функции $\rho(x)$ и $f(x)$, непрерывные вместе со своими первыми производными, такие, что любая линейная комбинация $\mu_1\rho'(x) + \mu_2 f'(x)$ (μ_1, μ_2 действительные) имеет $\leqslant n-1$ нулей. Если $\rho(x)$ имеет на $[a, b]$ n различных действительных нулей $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ и $f(x)$ имеет n различных действительных нулей $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$, которые удовлетворяют неравенствам*

$$a_n < \alpha_n < \ldots < \alpha_2 < a_1 < \alpha_1, \tag{4}$$

то нули $\xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_{n-1}$ функции $\rho'(x)$ и нули $x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1}$ функции $f'(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_{n-2} < \ldots < \xi_2 < x_1 < \xi_1. \tag{5}$$

Из $\alpha_{k+1} < \xi_k < \alpha_k$, $a_{k+1} < x_k < a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ и (4) имеем $x_{k+1} < \xi_k < x_{k-2}$. Чтобы показать (5), рассмотрим функцию $\Phi(x, \lambda) = \rho^2(x) - \lambda^2 f^2(x)$, которая при любом действительном λ $(\lambda \neq 0)$ имеет $2n-1$ нулей на отрезке $[a_n, \alpha_1]$, причем на каждом интервале (α_{k+1}, a_k) и (a_{k+1}, α_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ лежит один нуль. Предположив, что при некотором фиксированном k, $x_k > \xi_k$, имеем

$$\alpha_{k+1} < \xi_k < x_k < a_k,$$

легко подобрать λ так, чтобы было

$$\Phi(\alpha_{k+1}, \lambda) < 0, \quad \Phi(\xi_k, \lambda) > 0, \quad \Phi(x_k, \lambda) < 0, \quad \Phi(a_k, \lambda) > 0, \tag{6}$$

что противоречит сказанному выше о числе нулей на (α_{k+1}, a_k).

В самом деле, при любом λ имеем $\Phi(x_k, \lambda) < \Phi(\xi_k, \lambda)$, так как $\rho^2(x_k) < \rho^2(\xi_k)$ и $f^2(x_k) > f^2(\xi_k)$.

Если $f(\xi_k) \neq 0$, то выберем λ_1 по условию $\Phi(\xi_k, \lambda_1) = 0$, тогда $\Phi(x_k, \lambda_1) < 0$; выберем λ_2 по условию $\Phi(x_k, \lambda_2) = 0$, тогда $\Phi(\xi_k, \lambda_2) > 0$. Чтобы выполнялось (6), полагаем

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2}.$$

Если $f(\xi_k) = 0$, тогда $\Phi(\xi_k, \lambda) = \rho^2(\xi_k) > 0$ при любом λ; можно всегда выбрать λ столь большим, чтобы $\Phi(x_k, \lambda) < 0$.

Аналогично рассматриваются случаи $x_k = \xi_k$, $x_{k-1} \leqslant \xi_k$.

Замечание. Лемма 1 осталась бы в силе, если бы одна из функций $f(x)$ или $\rho(x)$ имела на $[a, b]$ только $n-1$ нулей.

Лемма 2*. *Пусть*

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

* Доказательство этой леммы мне любезно сообщил акад. С. Н. Бернштейн.

где $P_n(x)$ — многочлен степени n с действительными коэффициентами, все нули которого лежат на отрезке $[-1, 1]$. Тогда k-я производная $f^{(k)}(x)$ $(k=1, \ldots, n)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ $n-k$ нулей.

Функция $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} A_k(1-x)^{k-1/2}(1+x)^{n-k-1/2}.$$

Так как система функций $(1-x)^k(1+x)^{n-k}$ образует систему Декарта и так как все нули многочлена $P_n(x)$ лежат на отрезке $[-1, 1]$, то в ряде чисел $A_0, A_1, \ldots, A_n$ имеется n перемен знака. Полагая $y_k=(1-x)^{k-1/2}(1+x)^{n-k-1/2}$, замечаем, что

$$(1-x^2)^{n+1/2}\frac{d^n}{dx^n}y_k=\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{k\nu}(1-x)^{n+k-\nu}(1+x)^{n-k+\nu},$$

где $\operatorname{sign}\alpha_{k\nu}=(-1)^k$, откуда вытекает, что при разложении многочлена $(1-x^2)^{n+1/2}f^{(n)}(x)$ по функциям Декарта $(1-x)^m(1+x)^{2n-m}$ в ряде коэффициентов не будет ни одной перемены знака; следовательно, $f^{(n)}(x)$ не имеет ни одного нуля на отрезке $[-1, 1]$, и так как $f(x)$ имела n нулей, то $f^{(k)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ имеет $n-k$ нулей на $[-1, 1]$.

Следствие. *Если $Q_n(x)$ и $R_{n-1}(x)$ — два многочлена степени n и $n-1$ такие, что все их нули лежат на отрезке $[-1, 1]$, причем нули обоих многочленов взаимно разделены, то разделены нули функций $\frac{d^k}{dx^k}Q_n(x)$ и $\frac{d^k}{dx^k}\left\{\sqrt{1-x^2}R_{n-1}(x)\right\}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.*

Лемма 3. *Пусть $P_n(x)$ — многочлен, удовлетворяющий условию (1), и, кроме того, $P_n(x)\not\equiv\gamma M_n(x)$. Тогда для всех вещественных α первые n производных функции*

$$F(x, \alpha)=\cos\alpha\, M_n(x)+\sin\alpha\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)-P_n(x)$$

имеют только простые нули.

Достаточно рассмотреть $0\leqslant\alpha<\pi$.

1°. $\alpha=0$. В тех n точках, где $\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\right\}$ обращается в нуль, из (2) имеем

$$|P_n'(x)|\leqslant|M_n'(x)|.$$

Так как нули $M_n'(x)$ и $\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\right\}$ разделены, то $M_n'(x)$ имеет последовательно противоположные знаки в последовательных нулях $\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\right\}$, откуда и следует, что $F'(x, 0)$ имеет $n-1$ простых нулей.

2°. $\alpha=\pi/2$. В тех $n-1$ точках, где $M_n'(x)=0$, имеем

$$|P_n'(x)|\leqslant\left|\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\right\}\right|.$$

Кроме того, это неравенство имеет место в окрестности точек $+1$ и -1. Таким образом, $F'(x, \pi/2)$ имеет $\geqslant n$ нулей на $[-1, 1]$ и, по лемме 2, n нулей. По теореме Ролля и лемме 2 $F^{(k)}(x, \pi/2)$

($k=1,\ldots,n$) имеет $n-k+1$ нулей на $[-1, 1]$, каждый из которых простой.

3°. $0<\alpha<\pi/2$ ($\pi/2<\alpha<\pi$ рассматривается аналогично). Заметим, что

$$\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\, N_{n-1}(x)\right\}=\frac{K_n(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $K_n(x)$ — многочлен степени n, все нули которого лежат на $[-1, 1]$ и взаимно разделены с нулями $M_n'(x)$. Положим

$$\cos\varphi=\frac{K_n(x)}{\sqrt{K_n^2(x)+(1-x^2)M_n'^2(x)}}=\frac{\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\right\}}{\sqrt{H_1(x)}},$$

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{1-x^2}\,M_n'(x)}{\sqrt{K_n^2(x)+(1-x^2)M_n'^2(x)}}=\frac{M_n'(x)}{\sqrt{H_1(x)}},$$

$$R(x)=\cos\alpha\, M_n(x)+\sin\alpha\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x),$$

$$R'(x)=\cos\alpha\, M_n'(x)+\sin\alpha\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\right\}=\sqrt{H_1(x)}\,\sin(\varphi+\alpha).$$

Когда x изменяется от -1 до 1, φ изменяется от $n\pi$ до 0 ([4]). Следовательно, $R'(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ принимает по абсолютной величине n раз значение $\sqrt{H_1(x)}$ с последовательно противоположными знаками в точках, где $|\sin(\varphi+\alpha)|=1$. В этих n точках имеем, по (2),

$$|P_n'(x)|\leqslant\sqrt{H_1(x)}=|R'(x)|. \tag{7}$$

Так как $H_1(x)\to\infty$ при $x\to\pm1$, то неравенство (7) соблюдается в достаточно малой окрестности точек -1 и $+1$, причем в окрестности точки -1 $R'(x)$ имеет знак, противоположный тому, который она принимает в самой левой точке x, где $|\sin(\varphi+\alpha)|=1$. Этим и завершается доказательство леммы.

Сохраняя обозначения леммы 3, докажем неравенство (3) при фиксированном k. Пусть в некоторой точке x_0 $(-1<x_0<1)$ $P_n^{(k)}(x_0)\geqslant H_k(x_0)$.

Функция $R^{(k)}(x)-\lambda P_n^{(k)}(x)$ при подходяще выбранных параметрах α и λ $(-1\leqslant\lambda\leqslant1)$ имеет двойной нуль в точке x_0, что противоречит лемме 3. Действительно, выбирая α по условию

$$R^{(k+1)}(x_0)\,P_n^{(k)}(x_0)-R^{(k)}(x_0)\,P_n^{(k+1)}(x_0)=0,$$

а затем выбирая λ по условию

$$R^{(k)}(x_0)-\lambda P_n^{(k)}(x_0)=0,$$

получаем

$$R^{(k+1)}(x_0)-\lambda P_n^{(k+1)}(x_0)=0.$$

Выражаю глубокую благодарность акад. С. Н. Бернштейну за исключительно внимательное отношение и помощь, оказанную мне в моей работе.

Поступило
3 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, С. R., 190, 237 (1930). [2] A. C. Schaeffer and R. J. Duffin, Bull. Am. Math. Soc., 44, No. 4 (1938). [3] В. А. Марков, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля, изд. СПб. ун-та, 1892. [4] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, 4 (1930).