

С. ФОМИН

К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 V 1949)

В то время как теорию динамических систем с чисто точечным спектром можно, по существу, считать законченной, все сведения о динамических системах с непрерывным спектром ограничиваются наличием некоторого числа примеров таких систем. К тому же во всех этих примерах спектр динамической системы один и тот же, именно счетнократный лебеговский. Так как относительно всех этих примеров динамических систем с непрерывным спектром до сих пор неизвестно, изоморфны они или нет, то оставался нерешенным даже вопрос о самом существовании различных (т. е. не изоморфных) неразложимых динамических систем с непрерывным спектром.

Настоящая заметка посвящена изучению одного класса динамических систем с непрерывным спектром. Полученные нами результаты позволяют, в частности, установить существование некоторых новых типов неразложимых динамических систем с непрерывным спектром (например, систем со счетнократным нелебеговским спектром). Гипотеза о том, что излагаемая ниже конструкция должна привести к динамическим системам с нелебеговским спектром, была высказана А. Н. Колмогоровым еще несколько лет назад.

Пусть Ω — пространство, точками которого являются всевозможные бесконечные в обе стороны последовательности $\omega = \{\omega_n\}$ действительных чисел. Преобразование

$$S\{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\} \quad (1)$$

определяет в Ω динамическую систему с дискретным временем.

Пусть μ — конечная мера в Ω , инвариантная относительно преобразования S . Будем считать для определенности $\mu(\Omega) = 1$.

Числа

$$M_{n_1, n_2, \dots, n_i} = \int_{\Omega} \omega_{n_1} \omega_{n_2} \dots \omega_{n_i} d\mu(\omega)$$

(если они существуют) называются моментами меры μ . Мы будем рассматривать только такие меры, для которых существуют по крайней мере моменты второго порядка.

Для инвариантной меры моменты второго порядка

$$\int_{\Omega} \omega_n \omega_m d\mu(\omega)$$

зависят только от разности $n - m = k$.

$$B(k) = \int_{\Omega} \omega_n \omega_{n+k} d\mu(\omega)$$

называется корреляционной функцией меры μ .

Как показал А. Я. Хинчин ⁽¹⁾, для того чтобы функция $B(k)$ была корреляционной функцией некоторой меры, необходимо и достаточно, чтобы она была положительно определенной. Следовательно, $B(k)$ может быть представлена в виде

$$B(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} dF(\lambda);$$

$F(\lambda)$ называется спектральной функцией меры μ .

Если в Ω выбрать некоторое конечное число координат $\omega_n, \dots, \omega_{n_k}$, то они порождают конечномерное пространство, являющееся фактор-пространством пространства Ω . Для любой меры μ в Ω естественным образом определяется ее проекция в это конечномерное пространство. Такие проекции мы будем называть конечномерными проекциями меры μ .

Определение. Инвариантная мера, все конечномерные проекции которой суть гауссовские нормальные распределения в пространстве соответствующего числа измерений, называется нормальной инвариантной мерой. Динамическую систему Ω с некоторой фиксированной нормальной инвариантной мерой в ней будем называть нормальной динамической системой.

Для дальнейшего существенна следующая хорошо известная теорема.

Пусть $B(k)$ — произвольная положительно определенная функция. Тогда в пространстве Ω существует одна и только одна нормальная мера μ , имеющая $B(k)$ своей корреляционной функцией.

Если функция $B(k)$ дана, то соответствующая ей нормальная мера строится так: ее l -мерная проекция в фактор-пространство, определяемое координатами с номерами $n_1, n_2, \dots, n_l$, есть мера, соответствующая характеристической функции

$$\chi(t_1, t_2, \dots, t_l) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} B(n_i - n_j) t_i t_j}. \quad (2)$$

Формула (2) легко позволяет выразить все моменты нормальной инвариантной меры через ее вторые моменты. Для этого надо воспользоваться тем известным фактом (см., например, ⁽²⁾), что моменты некоторой функции распределения служат коэффициентами разложения в ряд Маклорена ее характеристической функции. Разлагая функцию (2) в ряд, получим, что все нечетные моменты нормальной меры равны нулю, а каждый момент $a_{n_1, n_2, \dots, n_{2m}}$ представляет собой сумму $\frac{2m!}{2^m m!}$

произведений моментов второго порядка, причем эта сумма составлена так, что она симметрична относительно индексов $n_1, n_2, \dots, n_{2m}$.

Пусть μ — нормальная инвариантная мера, имеющая непрерывную спектральную функцию $F(\lambda)$. Тогда ее корреляционная функция $B(k)$ будет функцией со средним, равным нулю.

Отсюда и из указанного выше выражения старших моментов нормальной меры через вторые может быть получена следующая

Теорема 1. *Для того чтобы динамическая система Ω с нормальной инвариантной мерой μ была системой с обобщенным*

перемешиванием, необходимо и достаточно, чтобы спектральная функция $F(\lambda)$ меры μ была непрерывна.

Следствие. Всякая нормальная динамическая система с непрерывной спектральной функцией неразложима.

Пользуясь опять-таки выражением старших моментов нормальной инвариантной меры через ее вторые моменты, можно установить следующие свойства спектра нормальной динамической системы, имеющей данную спектральную функцию $F(\lambda)$. $F(\lambda)$ предполагается непрерывной.

Максимальным спектральным типом такой динамической системы будет

$$\psi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(\lambda), \quad (3)$$

где $F_1(\lambda) = F(\lambda)$, $F_n(\lambda) = F_{n-1} * F(\lambda)$, т. е. $F_n(\lambda)$ есть n -кратная свертка функции $F(\lambda)$ с самой собой, а коэффициенты $a_n > 0$ выбраны так, чтобы ряд (3) сходиллся.

Все свертки функции $\psi(\lambda)$, очевидно, ей эквивалентны.

Непрерывный спектр такой динамической системы должен быть, повидимому, всегда счетнократным. Он будет обязательно счетнократным, если $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна или если все $F_n(\lambda)$ имеют тот же тип, что и $F(\lambda)$.

Отсюда вытекает

Теорема 2. Какова бы ни была непрерывная монотонная функция $\Phi(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, такая, что все ее свертки ей подчинены, существует неразложимая динамическая система, для которой $\Phi(\lambda)$ будет максимальным спектральным типом.

В частности, существуют неразложимые динамические системы с нелебеговским непрерывным спектром.

Если за $F(\lambda)$ принять некоторую монотонную функцию, которая сама не абсолютно непрерывна, но ее свертки уже будут абсолютно непрерывны, то можно построить динамическую систему с неоднородным (частично лебеговским, частично нелебеговским) непрерывным спектром.

Поступило
11 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Я. Хинчин, Усп. математ. наук, 5, 42 (1938). ² Г. Крамер, Математические методы статистики, 1948.