Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. Ю. ТСЕНГ

ОБОБЩЕННЫЕ ОБРАТНЫЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ МЕЖДУ ДВУМЯ УНИТАРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VI 1949)

I. Введение. Важные исследования о классических обратных ограниченных бесконечных матриц принадлежат, главным образом, O. Toeplitz'у и G. Julia. Однако E. H. Moore первый ввел в явном виде понятие обобщенной обратной и развил обширную теорию, дополненную R. W. Barnard'ом для модулярных матриц и Y. K. Wong'ом для некоторых классов немодулярных матриц.

Все эти матрицы являются частными случаями замкнутых операторов. До сих пор, как нам кажется, основные определения и теоремы (тем более, доказательства) не перенесены в теорию операторов. Следуя по совершенно другому пути, мы приходим к построению общей теории обратных операторов, которая использует современную операторную технику и некоторые результаты, недавно нами полученные.

Объект нашей работы мы можем описать следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}^1$ и $\mathfrak{M}^2$ — два полных унитарных пространства (сепарабельных или несепарабельных) линейных по отношению к левому умножению на одну и ту же систему чисел, действительных, комплексных или кватернионов.

Пусть A^{12} — линейный оператор, преобразующий всякий вектор f^1 из его области определения $\mathfrak{D}^1 \subset \mathfrak{M}^1$ в некоторый вектор $f^1 A^{12}$ из его области изменения $\mathfrak{R}(A) \subset \mathfrak{M}^2$: $\mathfrak{R}(A) \equiv \mathfrak{D}^1 A^{12}$. Мы рассматриваем те свойства оператора A^{12}, которые характеризуют возможность его обращения, для чего мы вводим два следующих основных понятия.

Определение. Пусть A^{12}, R^{21} — линейные операторы с плотными областями определения $\mathfrak{D}^1$, $\mathfrak{D}^2$ и пусть P^1, P^2 — операторы проектирования на* $\overline{\mathfrak{D}^2 R^{21}}$, $\overline{\mathfrak{D}^1 A^{12}}$ в пространствах $\mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{M}^2$ соответственно. Тогда оператор R^{21} называется обобщенным обратным (кратко, о. о.) оператора A^{12}, если

$$\mathfrak{D}^1 A^{12} \subseteqq \mathfrak{D}^2, \qquad \mathfrak{D}^2 R^{21} \subseteqq \mathfrak{D}^1,$$

$$A^{12} R^{21} = P^1, \qquad R^{21} A^{12} = P^2.$$

Пусть $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ — линейные подпространства (не обязательно замкнутые) полного унитарного пространства $\mathfrak{M}$ и пусть $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{L}$.

---

* Если $\mathfrak{L}$ — подмножество унитарного пространства $\mathfrak{M}$, то $\overline{\mathfrak{L}}$ обозначает замыкание множества $\mathfrak{L}$ в смысле нормы в $\mathfrak{M}$.

Пространство $\mathfrak{L}$ называется разложимым относительно $\mathfrak{N}$, если ортогональная проекция на $\overline{\mathfrak{N}}$ всякого элемента f из $\mathfrak{L}$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Другими словами, $\mathfrak{L}$ разложимо относительно $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L} = \mathfrak{N} \oplus (\mathfrak{L} \cdot O\,\mathfrak{N})$, где $O\mathfrak{N}$ — совокупность всех векторов, ортогональных к $\mathfrak{N}$.

II. Операторы с плотной областью определения. В дальнейшем мы обозначаем через $\mathfrak{N}(A)$ нулевое многообразие оператора A^{12}, т. е. совокупность всех векторов f_0^1 из $\mathfrak{D}^1$ таких, что $f_0^1 A^{12} = O^2$.

Критерий существования и единственности о. о., а также его значение в теории разрешимости даются следующей теоремой:

Теорема A. *Линейный оператор A^{12} с плотной областью определения $\mathfrak{D}^1$ имеет о. о. тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}^1$ разложимо относительно $\mathfrak{N}(A)$. В этом случае оператор A^{12} имеет единственный (максимальный) о. о. R_Δ^{21} (с максимальной областью определения), так что всякий о. о. есть сужение оператора R_Δ^{21} и*

$$\mathfrak{D}_\Delta^2 = \mathfrak{D}(R_\Delta^{21}) = \mathfrak{D}^1 A^{12} \oplus O(\mathfrak{D}^1 A^{12}), \qquad \mathfrak{N}(R_\Delta) = O(\mathfrak{D}^1 A^{12}).$$

Никакие другие о. о. не имеют замкнутого нулевого многообразия.

Кроме того, уравнение $x^1 A^{12} = g^2$ всегда имеет экстремальное виртуальное решение x_*^1, определенное равенством $x_*^1 = g^2 R_\Delta^{21}$ для произвольных векторов g^2 из $\mathfrak{D}^1 A^{12} \oplus O(\mathfrak{D}^1 A^{12})$.

Здесь „виртуальное решение" есть новое основное понятие для функциональных уравнений. Оно обозначает вектор x_Δ^1 из $\mathfrak{D}^1$, для которого функционал $\| x^1 A^{12} - g^2 \|$ достигает абсолютного минимума $\| x_\Delta^1 A^{12} - g^2 \|$, когда x^1 пробегает $\mathfrak{D}^1$. Оно становится „экстремальным", если его длина наименьшая среди всех виртуальных решений.

Значение о. о. для теории разрешимости, даже в конечномерном случае, за исключением гауссовского частного случая наименьших квадратов, ускользнуло, повидимому, от внимания авторов в этой области. По поводу дальнейших свойств экстремальных и виртуальных решений уравнения $x^1 A^{12} = g^2$ мы отсылаем интересующегося читателя к нашей работе об этих решениях, которая будет опубликована.

Очевидно, для о. о. R равенство $ARA = A$ имеет место без ограничений. Обратно, в какой мере решение уравнения $AXA = A$ ведет себя как о. о.? Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой, которая характеризует оператор R.

Теорема B. *Пусть S^{21} — линейный оператор с плотной областью определения $\mathfrak{D}(S)$, удовлетворяющий уравнениям*

$$ASA = A \text{ на } \mathfrak{D}^1, \qquad P^2 S P'_{O\mathfrak{N}(A)} = S \text{ на } \mathfrak{D}(S).$$

Тогда среди сужений оператора S существуют о. о. оператора A, один из которых S_Δ с

$$\mathfrak{D}(S_\Delta) = \mathfrak{D}^1 A \oplus [\mathfrak{D}(S) \cdot O(\mathfrak{D}^1 A)]$$

имеет существенную максимальную область определения.

Действительно, $\mathfrak{D}(S)$ разложимо относительно $\mathfrak{D}(S) \cdot O(\mathfrak{D}^1 A)$

$$\mathfrak{D}(S) = (\mathfrak{D}(S) \cdot \overline{\mathfrak{D}^1 A}) \oplus [\mathfrak{D}(S) \cdot O(\mathfrak{D}^1 A)], \qquad P^2_{\overline{O(\mathfrak{D}^1)A}}\, \mathfrak{D}(S) \subseteq \mathfrak{N}(S).$$

Кроме того, сам оператор S есть о. о. оператора A тогда и только тогда, когда он удовлетворяет одному из следующих дополнительных условий

$$\mathfrak{D}(S)\cdot\overline{\mathfrak{D}^1 A} = \mathfrak{D}^1 A, \qquad \mathfrak{R}(S) \subseteqq O(\mathfrak{D}^1 A).$$

Некоторые дальнейшие свойства о. о. собраны ниже для ссылок; они имеют также самостоятельный интерес.

Теорема C. *Для всякого о. о. R оператора A*

$$\mathfrak{D}^2 R = (\mathfrak{D}^1 A) R = \mathfrak{D}^1 \cdot O\,\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{D}^1 P^1, \quad \overline{\mathfrak{D}^2 R} = O\mathfrak{R}(A);$$

$$\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{D}^1 \cdot O(\mathfrak{D}^2 R); \quad \overline{\mathfrak{R}(A)} = O(\mathfrak{D}^2 R);$$

$$\mathfrak{D}^1 = \mathfrak{R}(A) \oplus [\mathfrak{D}^1 \cdot O\,\mathfrak{R}(A)] = \mathfrak{D}^2 R \oplus [\mathfrak{D}^1 \cdot O(\mathfrak{D}^2 R)];$$

$$\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{R}(R^*) \oplus \overline{\mathfrak{R}(R)} = [\mathfrak{D}(A^*)\cdot O\mathfrak{R}(A^*)] \oplus \mathfrak{R}(A^*);$$

$$\mathfrak{R}(A^*) = \mathfrak{D}(R^*)\cdot O\mathfrak{R}(R^*); \quad \mathfrak{R}(A^*) = O(\mathfrak{D}^1 A) = \mathfrak{R}(R_\Delta) = \overline{\mathfrak{R}(R)};$$

$$A^* R^* = P^2 \text{ на } \mathfrak{D}(A^*); \quad R^* = (R_\Delta)^*.$$

Оператор A допускает замкнутое расширение тогда и только тогда, когда

$$\overline{\mathfrak{D}^1 A} = \overline{\mathfrak{R}(R^*)}.$$

Отметим попутно, что хотя $\mathfrak{D}(A^*)$ и разложимо относительно $\mathfrak{R}(A^*)$, но неизвестно, будет ли оно всегда плотно в $\mathfrak{M}^1$.

III. Операторы, допускающие замыкание. Теперь мы предполагаем, что оператор A допускает замыкание и имеет о. о. R. Тогда мы можем ввести в рассмотрение его минимальные замкнутые расширения $\breve{A}$, а также операторы A^* и $(A^*)^{-1}$; кроме того, мы предполагаем, что существует единственный о. о. $(A^*)^{-1}$.

Таким образом, имеют, например, место следующие соотношения:

$$\mathfrak{R}(\breve{A}) = \mathfrak{R}((A^*)^{-1}), \qquad \mathfrak{R}((\breve{A})^{-1}) = O(\mathfrak{D}^1 \mathrm{A}),$$

$$\overline{\mathfrak{R}(A^*)} = O\mathfrak{R}(\breve{A}) = \overline{\mathfrak{R}((\breve{A})^{-1})}.$$

Естественно, нам желательно узнать:

Допускает ли также R замыкание? Продолжает ли $\breve{A}$ оставаться о. о. оператора R?

Теорема D. *При только что сделанных предположениях оператор A имеет о. о., допускающий замыкание, тогда и только тогда, когда $(\breve{A})^{-1}$ имеет сужение, которое является о. о. оператора A, или, что то же, $\overline{\mathfrak{R}(A)} = \mathfrak{R}(\breve{A})$.*

Кроме того, необходимое и достаточное условие того, чтобы оператор $\breve{A}$ оставался о. о. оператора A, заключается в том, чтобы, кроме условий, сформулированных выше, оператор $\breve{A}$ удовлетворял очевидному требованию $\mathfrak{R}(\breve{A}) \subseteqq \mathfrak{D}^2$.

Что касается различных оставшихся еще вопросов, то часть из них объединена и разрешена в следующей теореме:

Теорема E. *Следующие свойства эквивалентны между собой*:

A и R *оба допускают замыкание*;

R^* *есть о. о. оператора* A^*;

$\tilde{R}$ *есть о. о. оператора* $\tilde{A}$;

$$A \subseteq (\tilde{R})^{-1}, \qquad R \subseteq (\tilde{A})^{-1};$$
$$\mathfrak{R}(\tilde{A}) = \overline{\mathfrak{R}(A)}, \qquad \mathfrak{R}(\tilde{R}) = \overline{\mathfrak{R}(R)};$$
$$\overline{\mathfrak{D}^1 A} = \overline{\mathfrak{R}(R^*)}, \qquad \overline{\mathfrak{D}^2 R} = \mathfrak{R}(A^*).$$

Среди других вопросов мы изучаем также пространственные соответствия, классификацию, относительную модулярность, возмущения, аддитивные и композиционные свойства обобщенных обратных замкнутых операторов. Все это, а также связь настоящей работы с теориями Toeplitz'a — Julia, Moore — Barnard'a и Wong'a будет, как мы надеемся, доложено в дальнейшем в более полном изложении.

Поступило
4 I 1949