Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. БОЛТЯНСКИЙ

О РАЗМЕРНОЙ ПОЛНОЦЕННОСТИ КОМПАКТОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VI 1949)

В этой заметке дается условие размерной полноценности компактов. Этот вопрос был поставлен создателем гомологической теории размерности П. С. Александровым ([1], проблема XII).

Компакт X называется размерно-полноценным (топологически), если для любого компакта Y

$$\dim (X \times Y) = \dim X + \dim Y. \tag{1}$$

Все полиэдры и все одномерные компакты размерно-полноценны.

Первые размерно-неполноценные компакты F_m построены Л. С. Понтрягиным ([2]). Компакт P моей заметки ([5]) также размерно-неполноценен. Чтобы отметить, какое простое число p было фиксировано при построении компакта P, обозначим теперь этот компакт через P_p. Таким образом мы получим счетное множество компактов $P_2, P_3, P_5, P_7, \ldots$

Теорема 1. *Для размерной полноценности компакта X^n необходимо и достаточно, чтобы* (1) *было верно для $Y = P_p$ при любом простом p.*

Пусть $Z^n = (z_1^n, z_2^n, \ldots, z_k^{(n)}, \ldots)$ — степенной цикл в X^n относительно Φ с основанием p; z_k^n — цикл $\mathrm{mod}\, p^{\alpha_k}$. Если $\alpha_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то скажем, что Z^n — цикл $\mathrm{mod}\, p^{\omega}$. Пусть в X^n существует цикл $\overset{*}{Z}{}^n = (\dot{z}_1^n, \dot{z}_2^n, \ldots, \dot{z}_k^n, \ldots)$ относительно Φ такой, что $\dot{z}_k^n$ — цикл по тому же модулю p^{α_k}, что и z_k^n; что все коэффициенты циклов $\dot{z}_k^n$ кратны p и что $Z^n \sim \dot{Z}^n \mathrm{mod}\, \Phi$ в X^n — в этом случае скажем, что цикл $Z^n \mathrm{mod}\, p^{\omega}$ можно гомологически разделить на p.

Пусть $\dim X^n = n$. Скажем, что X^n размерно-полноценен $\mathrm{mod}\, p$, если существует (относительный) цикл $Z^n \mathrm{mod}\, p^{\omega}$ в X^n, который нельзя гомологически разделить на p. Скажем, что X^n алгебраически размерно-полноценен, если он размерно-полноценен по всякому простому модулю.

Теорема 2. *Для того чтобы компакт был размерно-полноценен топологически, необходимо и достаточно, чтобы он был размерно-полноценен алгебраически.*

Теорема 3. *Для того чтобы компакт X^n был размерно-полноценен (топологически), необходимо и достаточно, чтобы для любого простого p было $\dim_{Q_p} X^n = \dim X^n$, где $\dim_{Q_p}$ есть ∇-размерность по группе Q_p (определенной как приведенная по модулю* 1 *аддитивная группа всех рациональных чисел вида m/p^k).*

Доказательство основывается на следующих леммах.

А. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие N и δ_1, что всякий цикл $\mathrm{mod}\, p^\alpha$, расположенный в $U(P_p, \delta_1)$, будучи умножен на p^N, становится $\sim 0 \mod p^\alpha$ в $U(P_p, \varepsilon)$; цепь, осуществляющую гомологию, можно взять так, что все ее коэффициенты кратны p^N; всякий же цикл $\mathrm{mod}\, M$, где $(M, p) = 1$, расположенный в $U(P_p, \delta_1)$, гомологичен нулю в $U(P_p, \varepsilon)$.

Б. Если X^n размерно-неполноценен $\mathrm{mod}\, p$, то для любых N и $\varepsilon > 0$ существуют такие N_1 и δ_2, что всякий цикл $\mathrm{mod}\, p^\alpha$, $\alpha > N_1$, расположенный в $U(X^n. \delta_2)$, гомологичен в $U(X^n, \varepsilon)$ циклу $\mathrm{mod}\, p^\alpha$, все коэффициенты которого кратны p^N.

В. Пусть p и q — два взаимно простых числа и z^n — цикл (относительный) $\mathrm{mod}\, pq$, лежащий в области U, так что его можно рассматривать как цикл $\mathrm{mod}\, p$ и $\mathrm{mod}\, q$. Тогда, если $z^n \sim 0 \mod p$ и $z \sim 0 \mod q$ в U, то также $z^n \sim 0 \mod pq$ в U. Отсюда следует, что если в компакте X^n существует n-мерный степенной относительный цикл по основанию $m = pq$, не гомологичный нулю в X^n, где $(p, q) = 1$, то в X^n существует цикл с теми же свойствами по одному из оснований p, q. Аналогично, если m есть произведение нескольких попарно взаимно простых чисел. Отсюда, наконец, следует, что *во всяком n-мерном компакте существует n-мерный степенной относительный цикл по простому основанию* (усиление теоремы П. С. Александрова (1), п. 50).

Доказательство предложений А, Б, В несложно.

Г. Пусть X^n — размерно-неполноценен $\mathrm{mod}\, p$, p — простое. Тогда $\dim(X^n \times P_p) < n + 2$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем N и δ_1 как в А, N_1 и δ_2 как в Б, и пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Компакты X^n, P_p переведем δ-сдвигом в полиэдры K^n, K^2, которые достаточно мелко триангулируем. Тогда каждый достаточно мелкий цикл z^{n+2} с вершинами в $X^n \times P_p$ переводится 2δ-сдвигом в собственный цикл триангуляции $S(K^n \times K^2)$, являющейся барицентрическим подразделением комплекса многогранников $K^n \times K^2$. Каждый же цикл $\mathfrak{z}^{n+2} \mod M$ триангуляции $S(K^n \times K^2)$ как цикл старшей размерности есть линейная комбинация циклов вида $S(\mathfrak{z}^n \times \mathfrak{z}^2)$, где $\mathfrak{z}^n$, $\mathfrak{z}^2$ — циклы $\mathrm{mod}\, M$ триангуляций K^n, K^2, а S — символ барицентрического подразделения. Если теперь $M = p^\alpha$, $\alpha > N_1$, то, согласно Б, $\mathfrak{z}^n \sim p^N \xi^n (\mathrm{mod}\, p^\alpha)$ в $U(X^n, \varepsilon)$. Поэтому в $U(X^n, \varepsilon) \times U(P_p, \delta)$ $\mathfrak{z}^n \times \mathfrak{z}^2 \sim p^N \xi^n \times \mathfrak{z}^2 = \xi^n \times p^N \mathfrak{z}^2 (\mathrm{mod}\, p^\alpha)$. Если, согласно А, $\Delta \eta^3 = p^N \mathfrak{z}^2 (\mathrm{mod}\, p^\alpha)$ в $U(P_p, \varepsilon)$, то $\Delta(\xi^n \times \eta^3) = \Delta \xi^n \times \eta^3 + \varepsilon \cdot \xi^n \times \Delta \eta^3$. Первое слагаемое $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^\alpha)$, ибо все коэффициенты цепи η^3 кратны p^N, а $p^N \Delta \xi^n = \Delta p^N \xi^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^\alpha)$, так как $p^N \xi^n$ есть цикл $\mathrm{mod}\, p^\alpha$. Итак, $\mathfrak{z}^n \times \mathfrak{z}^2 \sim \xi^n \times p^N \mathfrak{z}^2 \sim 0 (\mathrm{mod}\, p^\alpha)$, а потому всякий достаточно мелкий цикл $\mathrm{mod}\, p^\alpha$, $\alpha > N_1$, компакта $X^n \times P_p$ гомологичен нулю в $U(X^n, \varepsilon) \times U(P_p, \varepsilon)$. Отсюда следует, что всякий абсолютный цикл $\mathrm{mod}\, p^\omega$ в $X^n \times P_p$ гомологичен нулю. Всякий же цикл $Z^{n+2} \mod p^k$ гомологичен нулю, ибо $d_{p^k}(P_p) = 1$. Итак, в $X^n \times P_p$ нет не гомологичных нулю $(n+2)$-мерных степенных абсолютных циклов по основанию p. Если же $M = q^k$, где q — простое число, отличное от p, то, согласно А, $\mathfrak{z}^2 \sim 0 (\mathrm{mod}\, q^k)$ в $U(P_p, \varepsilon)$, и поэтому $\mathfrak{z}^n \times \mathfrak{z}^2 \sim 0 \; (\mathrm{mod}\, q^k)$ в $U(X^n, \varepsilon) \times U(P_p, \varepsilon)$. Отсюда следует, что всякий абсолютный степенной цикл Z^{n+2} по простому основанию в $X^n \times P_p$ гомологичен нулю. Случай относительных циклов сводится к случаю абсолютных циклов так же, как в заметке (5), Д. Таким образом, согласно В, $\dim(X^n \times P_p) < n + 2$.

Д. Пусть z^n — произвольный цикл $\mathrm{mod}\, p^\alpha$ с вершинами в компакте X^n. Обозначим через $\gamma(z^n)$ нижнюю грань таких чисел γ, что в $U(X^n, \gamma)$ цикл z^n гомологичен циклу $\mathrm{mod}\, p^\alpha$, все коэффициенты которого кратны p. Цикл $Z^n=(z_1^n, z_2^n, \ldots, z_k^n, \ldots) \bmod p^\omega$ можно гомологически разделить на p тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{k\to\infty}\gamma(z_k^n)=0$. Отсюда следует, что если Z^n нельзя гомологически разделить на p, то можно выбрать такую подпоследовательность $\overset{*}{Z}{}^n$ цикла Z^n, что никакую подпоследовательность цикла $\overset{*}{Z}{}^n$ нельзя гомологически разделить на p.

Е. Если X^n — n-мерный компакт и $\varepsilon>0$ — произвольно, то существует такое δ, что каждая $(n+1)$-мерная δ-цепь компакта X^n может быть подвергнута такому ε-сдвигу, в результате которого она вырождается.

Для доказательства ε-сдвигом переведем компакт X^n в n-мерный полиэдр K^n, который мелко подразделим. Тогда всякая достаточно мелкая цепь компакта X^n может быть переведена ε-сдвигом в собственную цепь триангуляции K^n, следовательно, всякая $(n+1)$-мерная цепь в результате этого сдвига выродится.

Ж. Пусть X^n расположен в R^{2n+1}. Если Z^n — абсолютный цикл $\bmod p^\omega$ компакта X^n, никакую подпоследовательность которого нельзя гомологически разделить на p, то существует такое $\delta>0$ и, начиная с некоторого k, такие циклы $\mathfrak{z}_k^n \bmod p^{\alpha k}$, расположенные вне $U(X^n, \delta)$, что $\mathfrak{v}(z_k^n, \mathfrak{z}_k^n)\equiv 1 \pmod{p^{\alpha k}}$.

Для доказательства выберем, согласно Д, такое ε, что, начиная с некоторого $k=k_0$, цикл z_k^n не гомологичен в $U(X^n, \varepsilon)$ циклу $\bmod p^{\alpha k}$, все коэффициенты которого кратны p. Для этого ε выберем δ как в Е. Пусть, начиная с некоторого $k=k_1>k_0$, циклы z_k^n лежат в $U=U(X^n, \delta)$ и пусть вне U нет для z_k^n, $k>k_1$, такого цикла $\mathfrak{z}_k^n$, что $\mathfrak{v}(z_k^n, \mathfrak{z}_k^n)\equiv$ $\equiv 1 \pmod{p^{\alpha k}}$. Тогда для любого цикла $\mathfrak{z}^n \bmod p^{\alpha k}$ вне U $\mathfrak{v}(z_k^n, \mathfrak{z}^n)$ кратен p, т. е. $\mathfrak{v}(p^{\alpha k-1}z_k^n, \mathfrak{z}^n)\equiv 0 \pmod{p^{\alpha k}}$, и потому $p^{\alpha k-1}z_k^n\sim 0 \bmod p^{\alpha k}$ в U. Пусть $\Delta x_k^{n+1}\equiv p^{\alpha k-1}z_k^n \pmod{p^{\alpha k}}$, $x_k^{n+1}\in U(X^n, \delta)$. Тогда, согласно Е, ε-сдвигом σ эта цепь x_k^{n+1} переходит в вырождающуюся цепь. Пусть при этом сдвиге $p^{\alpha k-1} z_k^n$ переходит в цепь $p^{\alpha k-1}\overset{*}{z}{}_k^n$, тогда $\sigma(\Delta x_k^{n+1})=\Delta(\sigma x_k^{n+1})$, т. е. $p^{\alpha k-1}\overset{*}{z}{}_k^n\equiv 0 \pmod{p^{\alpha k}}$, и поэтому все коэффициенты цепи $\overset{*}{z}{}_k^n$ кратны p и $z_k^n\sim \overset{*}{z}{}_k^n \pmod{p^{\alpha k}}$ в $U(X^n, \varepsilon)$, что противоречит выбору числа ε.

З. Если X^n алгебраически размерно-полноценен, то он и топологически размерно-полноценен.

Доказательство. Пусть X^n алгебраически размерно-полноценен, а Y^m — произвольный компакт. По В, найдется такое простое число p, что в Y^m есть не гомологичный нулю степенной цикл Z^m с основанием p. Если этот цикл относительный (относительно Φ), то превратим его в абсолютный, стянув Φ в точку. Пусть $Z^m=(z_1^m, z_2^m, \ldots$ $\ldots, z_k^m, \ldots)$ (z_k^m — цикл $\bmod p^{\alpha k}$) и ε таково, что в $R^{2m+1}-U(Y^m, \varepsilon)$ существуют такие циклы $\mathfrak{z}_k^m$, что $\mathfrak{v}(z_k^m, \mathfrak{z}_k^m)\equiv\lambda_k\neq 0 \pmod{p^{\alpha k}}$. В X^n существует цикл $Z^n=(z_1^n, z_2^n, \ldots, z_k^n, \ldots)$ (z_k^n — цикл $\bmod p^{\beta k}$), никакую подпоследовательность которого нельзя гомологически разделить на p (согласно Д) и который мы также будем считать абсолютным. Выберем, по Ж, такое ε и в $R^{2n+1}-U(X^n, \delta)$ такие циклы $\mathfrak{z}_k^n$, что $\mathfrak{v}(z_k^n, \mathfrak{z}_k^n)\equiv$ $\equiv 1 \pmod{p^{\beta k}}$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\beta_k\geqslant\alpha_k$; рассматривая циклы z_k^n, $\mathfrak{z}_k^n$ по модулю $p^{\alpha k}$, имеем: $\mathfrak{v}(z_k^n, \mathfrak{z}_k^n)\equiv 1$ $\pmod{p^{\alpha k}}$. Пусть $\Delta y_k^{m+1}\equiv\mathfrak{z}_k^m \pmod{p^{\alpha k}}$, $\Delta y_k^{n+1}\equiv\mathfrak{z}_k^n \pmod{p^{\alpha k}}$ в R^{2m+1}, R^{2n+1}.

Тогда $\chi(y_k^{n+1} \times y_k^{m+1}, z_k^n \times z_k^m) = \chi(y_k^{n+1}, z_k^n) \cdot \chi(y_k^{m+1}, z_k^m) = \mathfrak{y}(\mathfrak{z}_k^n, z_k^n) \times \times \mathfrak{y}(\mathfrak{z}_k^m, z_k^m) \equiv \lambda_k \cdot 1 \not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha_k}}$, т. е. $\mathfrak{y}(\Delta (y_k^{n+1} \times y_k^{m+1}), z_k^n \times z_k^m) \not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha_k}}$. Но $\Delta(y_k^{n+1} \times y_k^{m+1}) \equiv \mathfrak{z}_k^n \times y_k^{m+1} + \varepsilon \cdot y_k^{n+1} \times \mathfrak{z}_k^m \pmod{p^{\alpha_k}}$ лежит вне окрестности $U(X^n, \delta) \times U(Y^m, \varepsilon)$ компакта $X^n \times Y^m$. Итак, $z_k^n \times z_k^m \not\sim 0 \pmod{p_k^\alpha}$ в $U(X^n, \delta) \times U(Y^m, \varepsilon)$, т. е. в $X^n \times Y^m$ есть степенной не гомологичный нулю цикл $Z^{m+n} = (z_1^n \times z_1^m, \ldots, z_k^n \times z_k^m, \ldots)$, и потому $\dim(X^n \times Y^m) = m + n$. Таким образом, X^n есть топологически размерноположноценный компакт.

И. Теорема 2 сразу следует из Г и З. Теорема 1 следует из теоремы 2 и Г. Для доказательства теоремы 3 заметим, что ∇-размерности компакта P_q по полям коэффициентов P, C_p, R_p, Q_p ([3]) таковы: $\dim_R P_q = 1$, $\dim_{C_p} P_q = 1$, $\dim_{Q_p} P_q = 1$, $\dim_{R_p} P_q = 1$ при $p \neq q$ и $\dim_{R_q} P_q = 2$ (p, q простые). Отсюда непосредственной подстановкой в формулы теоремы, содержащейся в ([4]), следует: $\dim(X^n \times P_q) < < \dim X^n + 2$ тогда и только тогда, когда $\dim_{Q_q} X^n < \dim X^n$. Отсюда сразу следует теорема 3.

Поступило
2 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Math. Ann., 106, 161 (1932). [2] Л. Понтрягин, C. R., 190, 1105 (1930). [3] М. Бокштейн, ДАН, 38, № 7 (1943). [4] М. Бокштейн, ДАН, 63, № 3 (1948). [5] В. Болтянский, ДАН, 67, № 4 (1949).