Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. М. ПОСТНИКОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО n-МЕРНОГО ПОЛИЭДРА В СВЯЗНОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО, АСФЕРИЧНОЕ В РАЗМЕРНОСТЯХ, БОЛЬШИХ ЕДИНИЦЫ И МЕНЬШИХ n

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 V 1949)

До сего времени классификация отображений в неодносвязные пространства почти не привлекала внимания исследователей. Не считая немногочисленных работ, посвященных отображениям в пространства специального вида (проективные пространства, например, (4), пространства линзы (5), асферические пространства (1) и т. п.), этот вопрос изучался лишь Роббинсом (1), получившим классификацию непрерывных отображений двухмерного полиэдра в произвольное пространство. В настоящей заметке решена простейшая задача этого типа, сформулированная в заголовке. Насколько мне известно, все ранее полученные теоремы о классификации отображений в неодносвязные пространства следуют из результатов этой заметки. Я буду пользоваться определениями, обозначениями и результатами моей заметки (2).

А. Этот пункт посвящен необходимым для дальнейшего определениям теории гомологии абстрактных групп (3).

Для некоторой мультипликативной, вообще говоря неабелевой, группы A и аддитивной абелевой группы G с A, как группой (левых) операторов, определим группу $L^q(A, G)$ q-мерных цепей группы A над группой G как аддитивную группу всех функций от q переменных из A со значениями в G. ∇-границу ∇f^q q-мерной цепи f^q определим формулой:

$$\nabla f^q(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}) = \alpha_1 f^q(\alpha_2, \ldots, \alpha_{q+1}) +$$
$$+\sum_{i=1}^{q}(-1)^i f^q(\alpha_1, \ldots, \alpha_i\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{q+1}) + (-1)^{q+1} f^q(\alpha_1, \ldots, \alpha_q).$$

Оказывается, что $\nabla\nabla f^q = 0$ для любой цепи f^q. Если $\nabla f^q = 0$, то цепь f^q назовем **ц и к л о м**. q-мерные циклы образуют подгруппу $Z^q(A, G)$ группы $L^q(A, G)$. q-мерные цепи вида ∇f^{q-1} назовем гомологичными нулю, они образуют подгруппу $H^q(A, G)$ группы $Z^q(A, G)$.

Фактор-группу $\nabla^q(A, G) = Z^q(A, G) - H^q(A, G)$ назовем q-мерной группой гомологий группы A над группой G. Ее элементы назовем классами гомологий и обозначим жирными буквами латинского алфавита.

Б. Пусть K — произвольный симплициальный комплекс с заданным порядком вершин. Любой его ориентированный симплекс имеет вид

$\varepsilon x_0 \ldots x_p$, где $\varepsilon = \pm 1$, а вершины $x^0, \ldots, x^p$ расположены в возрастающем порядке. Определяя цепи комплекса K, достаточно задавать их значения лишь для симплексов с $\varepsilon = +1$.

Симплекс вместе с некоторым порядком его вершин назовем упорядоченным симплексом.

В. Пусть, так же как в заметке ([2]), Y — произвольное связное (с помощью путей) топологическое пространство с отмеченной точкой $*$. Для каждого элемента α группы $\pi^1_*(Y)$ выберем определенное представляющее его отображение ρ_α числового единичного отрезка $[0,1]$ таким образом, чтобы нулевому элементу соответствовало отображение отрезка в точку $*$. Для любого одномерного упорядоченного симплекса σ^1 существует единственное линейное отображение ε_{σ^1} этого симплекса на отрезок $[0,1]$, переводящее первую вершину в 0, а вторую — в 1. Все отображения симплекса σ^1 вида $\rho_\alpha \varepsilon_{\sigma^1}$ назовем нормальными.

Нульнормальное ([2]) отображение комплекса K в пространство Y, нормальное на каждом одномерном симплексе из K, назовем 1-нормальным.

Обозначим через T_0^2 какой-нибудь фиксированный двумерный упорядоченный симплекс. Для любого одномерного цикла a^1 симплекса T_0^2 над группой $\pi^1_*(Y)$ существуют 1-нормальные отображения симплекса T_0^2, принадлежащие a^1 в смысле пункта Ж заметки ([2]). Выберем среди них одно и обозначим его через $\rho^1_{a^1}$. Для любого двумерного упорядоченного симплекса σ^2 существует единственное линейное отображение ε_{σ^2} симплекса σ^2 на симплекс T_0^2, сохраняющее порядок вершин. Все отображения симплекса σ^2 вида $\rho^2_{a^1} \varepsilon_{\sigma^2}$ назовем нормальными.

1-нормальное отображение комплекса K в пространство Y, нормальное на каждом двумерном симплексе из K, назовем 2-нормальным.

Обозначим через T_0^3 какой-нибудь фиксированный трехмерный упорядоченный симплекс. Если пространство Y асферично в размерности 2, то для любого одномерного цикла a^1 симплекса T_0^3 существуют 2-нормальные отображения симплекса T_0^3, принадлежащие a^1. Выберем среди них одно и обозначим через $\rho^3_{a^1}$. Для любого трехмерного упорядоченного симплекса σ^3 существует единственное линейное отображение ε_{σ^3} симплекса σ^3 на симплекс T_0^3, сохраняющее порядок вершин. Все отображения симплекса σ^3 вида $\rho^3_{a^1} \varepsilon_{\sigma^3}$ назовем нормальными.

2-нормальное отображение комплекса K в пространство Y, нормальное на любом трехмерном симплексе из K, назовем 3-нормальным.

Продолжая эту цепочку определений, мы придем к n-нормальному отображению комплекса K в пространство Y, асферичное в размерностях $2, 3, \ldots, n-1$.

$(n-1)$-нормальное отображение назовем н о р м а л ь н ы м. Очевидно, что любое нульнормальное отображение нульгомотопно нормальному.

n-нормальное отображение n-мерного комплекса назовем с т а н д а р т н ы м. Очевидно, что каждому одномерному циклу n-мерного комплекса над группой $\pi^1_*(Y)$ принадлежит (в смысле пункта Ж ([2])) одно и только одно стандартное отображение этого комплекса в пространство Y. Стандартное отображение K^n произвольного комплекса K, принадлежащее фундаментальному циклу некоторого нормального отображения комплекса K в Y, называется принадлежащим этому нормальному отображению. Очевидно, что стандартное отображение, принадлежащее данному нормальному, совпадает с ним на K^{n-1}.

Для нормального отображения f комплекса K в Y определена n-мерная цепь d_f^n, отличающая отображение $f \mid K^n$ от принадлежащего ему стандартного (см. ([2]), пункт К). Назовем ее характеристической цепью нормального отображения f.

Г. Рассмотрим случай, когда комплекс K является границей S некоторого $(n+1)$-мерного упорядоченного симплекса с вершинами $p_0 < p_1 < \ldots < p_{n+1}$. Нетрудно видеть, что любой одномерный цикл в S над группой $\pi_*^1(Y)$ определяется своими значениями α_i на ребрах $p_i p_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Обратно, для любого набора элементов α_i существует одномерный цикл, принимающий на ребрах $p_i p_{i+1}$ значения α_i.

Поляризуем сферу S, приняв за полюс вершину p_0, тогда стандартное отображение, принадлежащее циклу, соответствующему набору $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, определит некоторый элемент $k(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$группы $\pi_*^n(Y)$. Определенная таким образом функция k есть $(n+1)$-мерная цепь группы $\pi_*^1(Y)$ над группой $\pi_*^n(Y)$ (см. А) ($\pi_*^1(Y)$ естественным образом является группой операторов группы $\pi_*^n(Y)$). Эта цепь впервые была введена в ([3]), где доказано, что она является циклом и что класс гомологий этого цикла не зависит от произвола, имеющего место в определении стандартного отображения. Другими словами, класс гомологий $\mathbf{k}$ этого цикла является топологическим инвариантом пространства Y. Используя произвол, имеющий место в определении стандартного отображения, мы можем таким образом получить любой цикл класса $\mathbf{k}$.

Д. С помощью цикла k мы любому одномерному циклу a^1 комплекса K над группой $\pi_*^1(Y)$ отнесем $(n+1)$-мерную цепь $k^{n+1}(a^1)$ того же комплекса над группой $\pi_*^n(Y)$:

$$[k^{n+1}(a^1)](x_0 \ldots x_{n+1}) = k(a^1(x_0 x_1), a^1(x_1 x_2), \ldots, a^1(x_n x_{n+1}))$$

(см. Б). Оказывается, что цепь $k^{n+1}(a^1)$ является ∇_{a^1}-циклом и что класс ∇_{a^1}-гомологий $\mathbf{k}^{n+1}(a^1)$ этого цикла не зависит от произвола, имеющего место в определении стандартного отображения.

Если $a^1 : b^1 = \nabla a^0$, то $k^{n+1}(b^1) = a^0 k^{n+1}(a^1)$ (см. ([2]), пункт Е).

Для нормального отображения f имеет место формула:

$$\nabla_f d_f^n = -k^{n+1}(a_f^1).$$

Е. Для двух одномерных циклов a^1 и b^1 комплекса $\mathbf{k}$ над группой $\pi_*^1(Y)$ мы с помощью нульмерной цепи a^0 того же комплекса над той же группой определим их произведение $(a^1 \times b^1, a^0)$, являющееся n-мерной цепью комплекса $\mathbf{k}$ над группой $\pi_*^n(Y)$:

$$(a^1 \times b^1, a^0)(x_0 \ldots x_n) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j k(a^1(x_0 x_1), \ldots, a^1(x_{j-1} x_j), a^0(x_j), b^1(x_j x_{j+1}), \ldots, b^1(x_{n-1} x_n)).$$

Ж. Теперь готовы все нужные нам понятия и операции, и мы можем перейти к формулировке результатов. В формулировках пространство Y предполагается асферичным в размерностях $2, \ldots, n-1$.

Теорема продолжения. *Для того чтобы одномерный цикл a^1 $(n+1)$-мерного комплекса K над $\pi_*^1(Y)$ был фундаментальным циклом некоторого отображения комплекса K в Y, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{k}^{n+1}(a^1) = 0$.*

Из этой теоремы обычным приемом выводится

Основная теорема. *Два нормальных отображения f и g n-мерного комплекса в пространство Y, фундаментальные циклы a_f^1 и a_g^1 которых гомологичны между собой, тогда и только тогда гомотопны, когда существует такая нульмерная цепь a^0, что*

$$1)\ a_f^1 : a_g^1 = \nabla a^0;$$

$$2)\ d_f^n - a^0\, d_g^n\, \tilde{\nabla}_f (a_f^1 \times a_g^1, a^0).$$

Эта теорема полностью решает проблему классификации отображений n-мерного комплекса в Y, хотя и ограничивается сравнением двух нормальных отображений с гомологичными фундаментальными циклами.

Действительно, всякое отображение гомотопно нульнормальному и, следовательно, нормальному (см. В), а два отображения с негомологичными фундаментальными циклами заведомо негомотопны между собой.

Поступило
16 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Robbins, Trans. Am. Math. Soc., **49**, 308 (1942). [2] М. М. Постников, ДАН, **66**, № 2 (1949). [3] S. Eilenberg and S. MacLane, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **32**, No. 11, 277 (1946). [4] И. И. Гордон, ДАН, **65**, № 4 (1949). [5] W. Franz. Crelle Journ., **185**, No.2, 65 (1943).