Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 4

*ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Н. Д. ТАРАБАСОВ

# РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРЕССОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

*(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 20 V 1949)*

Рассмотрим круглую, тонкую пластинку, расположенную в плоскости $z = x + iy$ и состоящую из нескольких круговых концентрических колец и центрального диска, сопряженных посредством напряженной посадки.

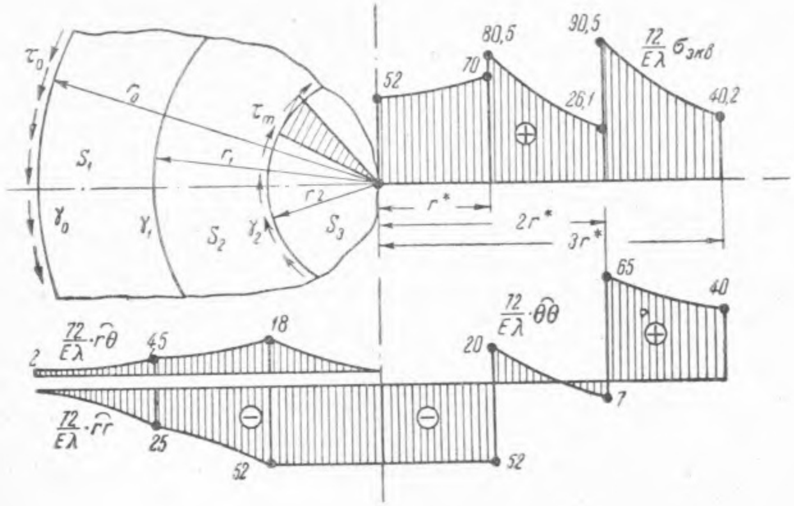

Рис. 1

Обозначим число колец через $m$ и область кольца $n$, ограниченную окружностями $\gamma_{n-1}$, $\gamma_n$ соответственных радиусов $r_{n-1}$, $r_n$, через $S_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$. Область, занимаемую всей пластинкой, обозначим через $S$ (см. рис. 1, где $m = 2$).

Материал колец и диска будем считать упругим, изотропным и однородным с одинаковыми механическими свойствами.

В настоящей статье дается вывод формул для компонентов вектора напряжения любой точки области $S_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m + 1)$ и расчет на прочность при условии, что на контуре $\gamma_0$, помимо взаимно уравновешивающихся любых нагрузок, заданы касательные напряжения $\tau_0$, уравновешивающиеся моментом $M_0$, приложенным к центральному диску, а на контурах $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ известны скачки векторов смещений.

Для простоты будем считать напряжения $\tau_0$ постоянными.

Очевидно, что скачок вектора смещения* $\delta_{n1}$ для всех точек контура $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ одинаков и численно равен разности внешнего радиуса области $S_{n+1}$ и внутреннего радиуса $S_n$ до посадки, а направление его в любой точке контура $\gamma_n$ совпадает с направлением нормали к $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$. Величины $\delta_{n1}$, вообще говоря, различны между собой.

Решение поставленной задачи сводится к определению функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, регулярных в соответственных областях $S_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ и удовлетворяющих известным условиям на границах.

Будем искать общее решение задачи в виде двух частных решений. Первое из них соответствует условию $M_0 = \tau_0 = 0$. Для него граничные условия запишутся в виде

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = f(t) \text{ на } \gamma_0; \tag{1}$$

$$\varphi_n^*(t) + t\overline{\varphi_n^{*\prime}(t)} + \overline{\psi_n^*(t)} = 0; \tag{2}$$

$$\varkappa\varphi_n^*(t) - t\overline{\varphi_n^{*\prime}(t)} - \overline{\psi_n^*(t)} = \delta_n t \text{ на } \gamma_n \quad (n = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Здесь $f(t)$ известная, заданная на контуре $\gamma_0$ функция, зависящая от нагрузки; $t$ — комплексная координата точек $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$. Кроме того, мы положили на $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$

$$\varphi_n^*(t) = \varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t), \quad \psi_n^*(t) = \psi_n(t) - \psi_{n+1}(t), \tag{4}$$

причем

$$\delta_n = \frac{2\delta_{n1}}{r_n}\mu, \quad \varkappa = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{5}$$

где $E$, $\mu$ и $\sigma$ — соответственно модуль упругости первого рода, второго рода и коэффициент Пуассона.

Согласно формуле (3) имеем:

$$2\mu\{(u_n - u_{n+1}) + i(v_n - v_{n+1})\} = \delta_n t \text{ на } \gamma_n \ (n = 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

где $u_n$, $v_n$ и $u_{n+1}$, $v_{n+1}$ — компоненты вектора смещения соответственно в областях $S_n$ и $S_{n+1}$.

Из уравнений (2) и (3), замечая, что $\bar{t} = r_n^2/t$, на $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ получим:

$$\varphi_n^*(t) = \frac{\delta_n t}{1+\varkappa}, \quad \psi_n^*(t) = -\frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)t}. \tag{7}$$

Отсюда, учитывая (4), найдем:

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n+1}(t) + \frac{\delta_n t}{1+\varkappa}, \quad \psi_n(t) = \psi_{n+1}(t) - \frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)t} \tag{8}$$

на $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$.

* Под скачком смещения здесь надо подразумевать упругую часть от общего геометрического скачка смещения.

Введем в $S_1$ новые регулярные в ней функции

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) \text{ и } \psi(z) = \psi_1(z) + \sum_1^m \frac{2\delta_k r_k^2}{(1+\varkappa) z}. \tag{9}$$

Из уравнений (8), учитывая (9) на границах $\gamma_n (n = 1, 2, \ldots, m)$, можно установить, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитически продолжимы * из области $S_1$ в каждую из областей $S_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m+1)$ и, таким образом, они будут регулярными всюду в области $S$, ограниченной $\gamma_0$.

Каждое из равенств (8) на границе $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ можно аналитически продолжить в область

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n+1} S_k.$$

Не вводя новых обозначений для каждой из продолженных таким образом функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$, заменим в (8) $t$ на $z$ и, полагая последовательно $n = 1, 2, \ldots, n-1$, после сложения найдем:

$$\varphi_n(z) = \varphi_1(z) - \sum_1^{n-1} \frac{\delta_k z}{1+\varkappa}, \quad \psi_n(z) = \psi_1(z) + \sum_1^{n-1} \frac{2\delta_k r_k^2}{(1+\varkappa) z}. \tag{10}$$

Заменив теперь $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ в равенстве (1) их значениями из уравнений (9), получим:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \sum_{k=1}^m \frac{2\delta_k r_k^2 t}{(1+\varkappa) r_0^2} + f(t). \tag{11}$$

Последнее равенство показывает, что отыскание $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ сводится к решению первой основной задачи теории упругости для области $S$.

Полагая $f(t) = 0$, будем иметь, используя метод Н. И. Мусхелишвили:

$$\varphi(z) = \sum_1^m \frac{r_k^2 \delta_k z}{r_0^2 (1+\varkappa)}, \quad \psi(z) = 0. \tag{12}$$

Учитывая зависимости (9), (10) и (12), найдем:

$$\varphi_n(z) = \sum_1^m \frac{r_k^2 \delta_k z}{r_0^2 (1+\varkappa)} - \sum_1^{n-1} \frac{\delta_k z}{1+\varkappa}, \quad \psi_n(z) = -\sum_n^m \frac{2\delta_k r_k^2}{(1+\varkappa) z} \quad (n = 1, 2, \ldots, m). \tag{13}$$

Второе частное решение для случая, когда на $\gamma_0$ заданы напряжения $\tau_0$, а на $\gamma_m$ — касательные же напряжения, постоянные по величине, их уравновешивающие, может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_0(z) = 0, \quad \psi_0(z) = -\frac{i r_0^2 \tau_0}{z}. \tag{14}$$

Суммированием (13) и (14) найдем общее решение задачи.

---

* Здесь мы использовали метод, предложенный Д. И. Шерманом.

Для компонентов напряжений в полярных координатах в области $S_n$ оно дает следующие выражения:

$$\widehat{rr}_n = \frac{E}{2}\left[\sum_1^m \frac{r_k\delta_{k1}}{r_0^2} - \sum_1^{n-1}\frac{\delta_{k1}}{r_k} - \frac{1}{r^2}\sum_n^m r_k\delta_{k1}\right],$$

$$\widehat{\theta\theta}_n = \frac{E}{2}\left[\sum_1^m \frac{r_k\delta_{k1}}{r_0^2} - \sum_1^{n-1}\frac{\delta_{k1}}{r_k} + \frac{1}{r^2}\sum_n^m r_k\delta_{k1}\right], \tag{15}$$

$$\widehat{r\theta}_n = \frac{r_0^2\tau_0}{r^2} \quad (n = 1, 2, \ldots, m),$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

Очевидно, составляющая напряжения $\widehat{r\theta}_{m+1}$ в диске зависит от закона распределения касательных напряжений вдоль радиуса $r_m$, вызванных $M_0$. Для линейного закона распределения имеем:

$$\widehat{r\theta}_{m+1} = \tau_0 \frac{r_0^2}{r_m^4} r^2 \quad (r_m \geqslant r \geqslant 0). \tag{16}$$

Компоненты напряжения $\widehat{rr}_{m+1}$ и $\widehat{\theta\theta}_{m+1}$ в диске мы получим из первых двух равенств (15), положив $n = m + 1$ и опустив в них последние слагаемые, зависимые от $r^2$.

На рис. 1 показаны эпюры компонентов напряжений и расчетных напряжений — $\sigma_{экв}$ (по третьей гипотезе прочности), помноженные на коэффициент $72/E\lambda$ при значениях: $m = 2$, $r_0 = 3r^*$, $r_1 = 2r^*$, $r_2 = r^*$, $\delta_{11} = 2r^*\lambda$, $\delta_{21} = r^*\lambda$, $\tau_0 = 2/72\,E\lambda$, где $\lambda$ — упругий относительный натяг.

Меняя в формулах (15) величины натягов $\delta_{k1}$, мы можем добиться желаемого напряженного состояния, что особенно важно для расчета на прочность быстро вращающихся дисков с учетом инерционных сил или при определении необходимых величин натягов в зависимости от заданного напряжения $\tau_0$ на каждой из границ $\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$.

В заключение отметим, что изложенный здесь метод можно применить ([3]) и в том случае, когда центральный диск будет ослаблен концентрическим отверстием.

Поступило
17 V 1949

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Шерман, ДАН, 27, № 9 (1940). [2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, 1935. [3] Н. Д. Тарабасов, Инженерн. сб., 3, в. 2 (1947).