Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. В. ШТРАУС

К ТЕОРИИ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VI 1949)

1. Замкнутый линейный оператор A, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$, будем называть эрмитовым, если $(Af, g) = (f, Ag)$, каковы бы ни были элементы f, g из области определения $\mathfrak{D}(A)$ оператора A. Отметим, что в общем случае многообразие $\mathfrak{D}(A)$ не предполагается плотным в $\mathfrak{H}$. При любом невещественном λ обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda$ многообразие элементов g вида:

$$g = (A - \bar{\lambda}E) f \quad (f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Как известно, $\mathfrak{L}_\lambda$ является подпространством в $\mathfrak{H}$. Ортогональное дополнение к $\mathfrak{L}_\lambda$ в $\mathfrak{H}$, т. е. соответствующее дефектное подпространство оператора A, обозначим через $\mathfrak{M}_\lambda$. В дальнейшем предполагаем, что $\mathfrak{M}_\lambda$ и $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$ являются ненулевыми подпространствами, т. е. что оба индекса дефекта оператора A отличны от нуля.

Нетрудно видеть, что для любой пары невещественных чисел λ, μ, принадлежащих одной и той же полуплоскости (верхней или нижней) комплексной плоскости, пространство $\mathfrak{H}$ представимо в виде прямой суммы $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{L}_\mu$.

Пусть λ_0 — какое-либо фиксированное невещественное число и Π — та полуплоскость комплексной плоскости, которая содержит точку λ_0. Пусть, далее, λ — произвольное невещественное число из Π. Тогда всякий элемент пространства $\mathfrak{H}$, в частности, любой элемент $\varphi \in \mathfrak{M}_{\lambda_0}$, однозначным образом представляется в виде суммы

$$\varphi = \varphi' + \varphi'', \tag{1}$$

где $\varphi' \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$, $\varphi'' \in \mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}$.

Ставя в соответствие каждому элементу $\varphi \in \mathfrak{M}_{\lambda_0}$ его составляющую φ' в разложении (1), мы определим линейный оператор $\varphi' = K(\lambda; \lambda_0)\varphi$.

Геометрически $K(\lambda; \lambda_0)$ есть оператор проектирования (вообще неортогонального) из $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ на $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$ параллельно $\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}$. Когда λ пробегает полуплоскость Π, мы получаем таким образом семейство операторов $K(\lambda; \lambda_0)$, которое будем называть параллельным проектором из $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$ оператора A.

Нашей целью является изучение семейства $K(\lambda; \lambda_0)$, а также того, в какой мере оператор A характеризуется этим семейством.

Отметим, что понятие параллельного проектора в частном случае эрмитова оператора с равными индексами дефекта близко к введенному в работах М. С. Лившица ([1], [2]) понятию характеристической матрицы-функции. В связи с этим изложенные ниже результаты можно рассматривать как обобщение на случай эрмитовых операторов с любыми индексами дефекта некоторых результатов М. С. Лившица, полученных им в [1, 2] для операторов с равными индексами дефекта.

2. При любом невещественном λ положим $U_\lambda = (A - \bar{\lambda}E)(A - \lambda E)^{-1}$. Введем далее в рассмотрение расширение S_λ оператора U_λ, полагая $S_\lambda = U_\lambda(E - P_{\bar{\lambda}})$, где P_λ — оператор ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M}_\lambda$. Оператор S_λ определен таким образом на всем $\mathfrak{H}$ и, так как оператор U_λ изометричен, норма S_λ равна единице.

При изучении семейства $K(\lambda;\ \lambda_0)$ полезной оказывается следующая формула:

$$K(\lambda;\ \lambda_0)\varphi = P_{\bar{\lambda}_0}\left(E - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\bar{\lambda}_0 - \lambda} S_{\lambda_0}\right)^{-1}\varphi \quad (\varphi \in \mathfrak{M}_{\lambda_0};\ \lambda \in \Pi). \tag{2}$$

Это равенство есть частный случай более общего соотношения

$$P_{\bar{\lambda}_0}\left(E - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\bar{\lambda}_0 - \lambda} T_{\lambda_0}\right)^{-1} K(\lambda;\ \lambda_0)\varphi = P_{\bar{\lambda}_0}\left(E - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\bar{\lambda}_0 - \lambda} T_{\bar{\lambda}_0}\right)^{-1}\varphi (\varphi \in \mathfrak{M}_{\lambda_0}; \lambda \in \Pi), \tag{3}$$

где T_{λ_0} — произвольный линейный оператор, определенный на всем $\mathfrak{H}$, являющийся расширением оператора U_{λ_0} и по норме не превосходящий единицы.

Ниже, при доказательстве предложений пп. 3 и 4, мы используем также следующее, вытекающее из (3), соотношение:

$$P_{\bar{\lambda}_0}\left(E - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\bar{\lambda}_0 - \lambda} T_{\lambda_0}\right)^{-1}\left[E - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\bar{\lambda}_0 - \lambda} K(\lambda;\ \lambda_0) T_{\lambda_0}\right]\psi = \psi \quad (\psi \in \mathfrak{M}_{\lambda_0};\ \lambda \in \Pi). \tag{4}$$

С помощью равенства (2) доказывается

Теорема 1. *Параллельный проектор $K(\lambda;\lambda_0)$ эрмитова оператора A является регулярной функцией* параметра λ, не превосходит по норме единицы и* $K(\lambda_0;\ \lambda_0)\ \varphi = P_{\bar{\lambda}_0}\varphi\ (\varphi \in \mathfrak{M}_{\lambda_0})$.

Введем в рассмотрение параллельный проектор $K(\bar{\lambda};\ \bar{\lambda}_0)$ из $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ оператора A (параметр $\bar{\lambda}$ пробегает полуплоскость $\bar{\Pi}$, содержащую точку $\bar{\lambda}_0$). Формула (2) принимает вид:

$$K(\bar{\lambda};\ \bar{\lambda}_0)\psi = P_{\lambda_0}\left(E - \frac{\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}}{\lambda_0 - \bar{\lambda}} S_{\bar{\lambda}_0}\right)^{-1}\psi \quad (\psi \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0};\ \lambda \in \Pi). \tag{2'}$$

Принимая во внимание, что $S_{\bar{\lambda}_0} = S^*_{\lambda_0}$, и сопоставляя (2) и (2'), получаем:

Теорема 2. *При любом λ из Π имеет место равенство*

$$K(\bar{\lambda};\ \bar{\lambda}_0) = K^*(\lambda;\ \lambda_0).$$

3. Естественно возникает вопрос, будет ли всякое семейство операторов $K(\lambda;\ \lambda_0)$ $(\lambda \in \Pi)$, обладающее свойствами, указанными в теореме 1, параллельным проектором некоторого эрмитова оператора A.

С помощью известной теоремы М. А. Наймарка о дистрибутивной оператор-функции (см. [3] или [4]) можно установить следующее предложение**:

* Здесь и ниже мы рассматриваем оператор-функции, регулярные в смысле слабой сходимости операторов.

** На возможность применения этой теоремы автору указал М. А. Наймарк.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство бесконечного унитарного пространства $\mathfrak{H}$, причем $\dim(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}) \geqslant \dim\mathfrak{M}$. Пусть, далее, $L(\lambda)$ $(\lambda \in \Pi)$ — семейство линейных операторов, действующих в $\mathfrak{M}$ $(\mathfrak{D}(L(\lambda)) = \mathfrak{M})$, таких, что $L(\lambda)$ является регулярной функцией параметра λ и по норме не превосходит единицы.*

Тогда в $\mathfrak{H}$ существует такой эрмитов оператор A_0 с равными индексами дефекта, для которого $\mathfrak{M}$ служит дефектным подпространством $\mathfrak{M}^0_{\overline{\lambda}_0}$ и параллельный проектор $K_0(\lambda;\ \lambda_0)$ которого связан с $L(\lambda)$ соотношением:

$$L(\lambda) = K_0(\lambda;\ \lambda_0)\, U,$$

где U — некоторый изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}^0_{\lambda_0}$ (ср. ([2]), теорема 1).

Лемма 2. *Пусть A_0 — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$ с равными индексами дефекта. Если параллельный проектор $K_0(\lambda;\ \lambda_0)$ оператора A_0 аннулируется для всякого элемента φ подпространства $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}^0_{\lambda_0}$, $K_0(\lambda;\ \lambda_0)\,\varphi \equiv 0$ $(\varphi \in \mathfrak{N})$, тогда оператор A_0 представим в виде ортогональной суммы операторов $A_0 = A_1 \oplus A_2$, где A_i — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2)$, $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, причем A_2 есть максимальный эрмитов оператор с дефектным подпространством $\mathfrak{M}^2_{\lambda_0} = \mathfrak{N}$ и с нулевым дефектным подпространством $\mathfrak{M}^2_{\overline{\lambda}_0}$.*

Заметим, что обратное предложение очевидно.

С помощью этих лемм удается установить следующее основное предложение:

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — подпространства бесконечномерного унитарного пространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}$ — замкнутая линейная оболочка их теоретико-множественной суммы, причем $\dim(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{P}) \geqslant \dim\mathfrak{P}$.*

Пусть, далее, $K(\lambda;\ \lambda_0)$ $(\lambda \in \Pi)$ — семейство операторов, отображающих $\mathfrak{M}'$ в $\mathfrak{M}$, обладающих следующими свойствами: 1) *$K(\lambda;\ \lambda_0)$ есть регулярная функция параметра λ $(\lambda \in \Pi)$;* 2) *$K(\lambda;\ \lambda_0)$ по норме не превосходит единицы;* 3) *$K(\lambda_0;\ \lambda_0)\varphi = P_{\mathfrak{M}}\varphi$ для любого $\varphi \in \mathfrak{M}'$, где $P_{\mathfrak{M}}$ — оператор ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M}$.*

Тогда в $\mathfrak{H}$ существует такой эрмитов оператор A с дефектными подпространствами $\mathfrak{M}_{\lambda_0} = \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0} = \mathfrak{M}$, для которого заданное семейство $K(\lambda;\ \lambda_0)$ является параллельным проектором из $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0}$.

Заметим, что при доказательстве можно, не нарушая общности, предположить, что $\dim\mathfrak{M}' \leqslant \dim\mathfrak{M}$, так как в противном случае, рассмотрев семейство $K^*(\lambda;\ \lambda_0)$, достаточно воспользоваться теоремой 2.

4. Переходим к вопросу, в какой мере эрмитов оператор A в $\mathfrak{H}$ характеризуется своим параллельным проектором $K(\lambda;\ \lambda_0)$.

Предположим сначала, что оператор A — простой, т. е. что у него нет инвариантного подпространства, в котором оператор, индуцированный оператором A, был бы самосопряженным.

Теорема 4. *Для того чтобы простые эрмитовы операторы A_1 в $\mathfrak{H}_1$ и A_2 в $\mathfrak{H}_2$ были изоморфными*, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие изометрические операторы X и Y, отображающие, соответственно, $\mathfrak{M}^1_{\lambda_0}$ на $\mathfrak{M}^2_{\lambda_0}$ и $\mathfrak{M}^1_{\overline{\lambda}_0}$ на $\mathfrak{M}^2_{\overline{\lambda}_0}$, что $K_1(\lambda;\ \lambda_0) = Y^{-1}K_2(\lambda;\ \lambda_0)\,X$ $(\lambda \in \Pi)$, где $\mathfrak{M}^i_{\lambda}$ — дефектное подпростран-*

* Операторы A_1 в $\mathfrak{H}_1$ и A_2 в $\mathfrak{H}_2$ называются изоморфными, если существует изометрический оператор W, отображающий $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$, такой, что $W\mathfrak{D}(A_1) = \mathfrak{D}(A_2)$ и $A_1 f = W^{-1}A_2 W f$ $(f \in \mathfrak{D}(A_1))$.

ство оператора A_i, *а* $K_i(\lambda;\lambda_0)$ — *его параллельный проектор из* $\mathfrak{M}^i_{\lambda_0}$ *в* $\mathfrak{M}^i_{\bar\lambda_0}$ $(i=1,\ 2)$ (*ср.* ([2]), *теорема* 2).

Особый интерес представляет, как известно, случай, когда область определения $\mathfrak{D}(A)$ эрмитова оператора A в $\mathfrak{H}$ плотна в $\mathfrak{H}$. Согласно теореме 4, этот случай должен характеризоваться некоторым внутренним свойством параллельного проектора $K(\lambda;\lambda_0)$ оператора A. Нетрудно видеть, что теперь нет необходимости предполагать оператор A простым.

Оператор S, отображающий унитарное пространство $\mathfrak{M}$ в унитарное пространство $\mathfrak{M}'$, назовем частично изометрическим, если хотя бы один из операторов S или S^* является изометрическим.

Лемма 3. *Область определения* $\mathfrak{D}(A)$ *эрмитова оператора* A *в* $\mathfrak{H}$ *плотна в* $\mathfrak{H}$ *тогда и только тогда, если оператор* $U_{\lambda_0}=(A-\bar\lambda_0E)(A-\lambda_0E)^{-1}$ *не имеет частично изометрических расширений в* $\mathfrak{H}$ *с неподвижным элементом.*

Лемма 4. *Пусть* A *и* U_{λ_0} — *те же, что и в лемме* 1. *Расширение* T_{λ_0} $(\mathfrak{D}(T_{\lambda_0})=\mathfrak{H})$ *оператора* U_{λ_0} *с нормой* $\|T_{\lambda_0}\|$, *не превосходящей единицы, не имеет неподвижных элементов тогда и только тогда, если для любого* $\psi\in\mathfrak{M}_{\bar\lambda_0}$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\left(\left(E-\frac{\lambda_0-\lambda}{\bar\lambda_0-\lambda}T_{\lambda_0}\right)^{-1}\psi,\ \psi\right)=0\quad(0<\varepsilon<\arg[\lambda\,\mathrm{Im}(\lambda_0)]<\pi-\varepsilon).$$

Леммы 3 и 4 в соединении с формулой (4) позволяют установить следующую теорему:

Теорема 5. *Область определения* $\mathfrak{D}(A)$ *эрмитова оператора* A *в* $\mathfrak{H}$ *плотна в* $\mathfrak{H}$ *тогда и только тогда, если для любого* $\psi\in\mathfrak{M}_{\bar\lambda_0}$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\left(\left[E-\frac{\lambda_0-\lambda}{\bar\lambda_0-\lambda}K(\lambda;\lambda_0)S\right]^{-1}\psi,\ \psi\right)=0$$

$(0<\varepsilon<\arg[\lambda\,\mathrm{Im}(\lambda_0)]<\pi-\varepsilon)$, *каков бы ни был частично изометрический оператор* S *из* $\mathfrak{M}_{\bar\lambda_0}$ *в* $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ (*ср.* ([1]), *теорема* 15).

Ульяновский государственный педагогический институт

Поступило 18 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Лившиц, Матем. сб., 19 (61), 2 (1946). [2] М. С. Лившиц, ДАН, 58, № 1 (1947). [3] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 3, 277 (1940). [4] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, № 5, 237 (1943).