Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

Я. Ю. ТСЕНГ

СВОЙСТВА И КЛАССИФИКАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VI 1949)

С точки зрения обобщенных обратных, замкнутые операторы замечательны тем, что они обладают довольно сильными свойствами и все же доставляют достаточно много патологических феноменов. Здесь, в продолжение нашей предыдущей заметки ([1]) (к которой мы отсылаем читателя по поводу основных понятий и обозначений), мы делаем попытку общего изучения таких операторов в связи с их обращением. Найденные результаты кажутся нам либо новыми, либо более точными, а классификация операторов, характеризующая их как с геометрической, так и с арифметической точки зрения, дает много замечательных преимуществ по сравнению с обычной теорией. И это так даже в том частном случае, когда рассматриваемые основные пространства гильбертовы или муровские.

Следующее предварительное замечание свяжет наше изложение с литературными данными и покажет, таким образом, значение замкнутых операторов не только для обобщенных обратных (о. о.). Пусть E^1, E^2 — две произвольные положительные (не обязательно дефинитные) эрмитовы матрицы с общими двойными множествами индексов $\mathfrak{P}^1\mathfrak{P}^1$, $\mathfrak{P}^2\mathfrak{P}^2$ соответственно. Пусть K^{12} — матрицы над $\mathfrak{P}^1\mathfrak{P}^2$ с E^2-модулярными строками и со столбцами, которых сопряженные E^1-модулярны. Обозначим через $\mathfrak{D}_0^1$ множество всех E^1-модулярных векторов Φ^1 таких, что $J_{E^1}\Phi^1K^{12}$ E^2-модулярны. Тогда

$$\Phi^1T^{12}\equiv J_{E^1}\Phi K^{12}$$

представляет собой замкнутый оператор T^{12} с плотной областью определения $\mathfrak{D}_0^1$

Некоторые дополнительные обозначения требуют объяснения. Приведенная область определения $\mathfrak{D}_r(A)$ оператора A есть ортогональное дополнение (в $\mathfrak{D}(A)$) его нулевого многообразия. Для положительного эрмитова оператора Q неотрицательное число $M_Q(I)$ обозначает нижнюю грань чисел (h, h), когда h изменяется в $\mathfrak{D}(Q)$ при условии $(hQ, h) = 1$, а (также неотрицательное число) $\underline{M}_r(Q)$ — нижняя граница оператора Q в его редуцированной области определения.

Мы начинаем с некоторых результатов, которые по своей силе и общности могут считаться одной из существенных частей данного исследования.

Теорема 1. *Замкнутый оператор A имеет единственный замкнутый о. о. R и операторы A^*, R^* взаимно о. о. Далее*

$$R = W^*B_1^{-1} = B_2^{-1}W^* = B_2^{-1}A^*B_1^{-1} \text{ на } \mathfrak{D}(R), \quad W = B_1^{-1}A \text{ на } \mathfrak{D}(A),$$
$$W = AB_2^{-1} \text{ на } \mathfrak{D}(R^*), \quad R = (Q^{22})^{-1}A^* \text{ на } \mathfrak{D}(R)\cdot\mathfrak{D}(A^*), \quad Q^{22} = A^*A,$$

где W — изометрический множитель оператора A, а B_1, B_2 — метрически эквивалентны операторам A, A^* соответственно (в смысле J. von Neumann'а). Кроме того, имеют место пространственные соотношения

$$\mathfrak{D}(R) = \mathfrak{D}(B_2^{-1}), \quad \mathfrak{R}(R) = \mathfrak{R}(B_1^{-1}), \quad \mathfrak{D}_r(R^*)\,W = \mathfrak{D}_r(R),$$
$$\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(B_1) = \mathfrak{N}(R^*) = \mathfrak{N}(B_1^{-1}) = \mathfrak{N}(W) = O\mathfrak{R}(R) = O\mathfrak{R}(A^*),$$
$$\mathfrak{N}(R) = \mathfrak{N}(W^*) = O\mathfrak{R}(A)$$

и взаимно-однозначные соответствия:

$$\mathfrak{R}(A) \sim \mathfrak{D}_r(A), \quad \mathfrak{R}(A) \sim \mathfrak{D}_r(A^*), \quad \mathfrak{R}(A) \sim \mathfrak{R}(A^*),$$

осуществляемые операторами A, B_1 и W соответственно; первые два из этих соответствий замкнуты, а последнее непрерывно.

При этом соответствие между двумя подпространствами $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$ называется з а м к н у т ы м, если из соотношений

$$f_n^1 \sim f_n^2, \quad f_n^1 \to f^1, \quad f_n^2 \to f^2$$

следует, что $f^1 \sim f^2$. Замкнутость оператора R заслуживает особого внимания, и оказывается, что может быть установлено, повидимому, более сильное предложение.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что A замкнут и что Φ_n^2 сходится к Φ^2 относительно $\mathfrak{D}(A^*)$, т. е. $(\Phi_n^2, \mathfrak{D}(A^*)) \to (\Phi^2, \mathfrak{D}(A^*))$. Тогда:* a) *$\Phi_n^2 R$ сходится слабо тогда и только тогда, когда $\|\Phi_n^2 R\|$ ограничено;* b) *$\Phi_n^2 R$ сходится сильно тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\Phi_m^2 R, \Phi_n^2 R) = \lim_{n\to\infty}\|\Phi_n^2 R\|^2.$$

В каждом из этих случаев предел равен $\Phi^2 R$.

С другой стороны, непрерывность оператора R, в особенности в случае ограниченного „несингулярного“ оператора A, была предметом внимания многих исследователей. Однако оказываются полезными дальнейшие, может быть неожиданные, характеристики, и мы сообщаем некоторые из них наряду с другими обобщениями.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы замкнутый оператор A имел ограниченный о. о., необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось одно из следующих эквивалентных условий:*

оператор P^1 Q^{11}-модулярен, где $Q^{11} = A^*A$;

оператор Q^{11} модулярен относительно $(Q^{11})^2$;

уравнение $x^1A^{12} = \Phi^2$ нормально разрешимо;

уравнение $x^1A^{12} = f^2$ имеет виртуальное решение для всякого вектора f^2 из $\mathfrak{M}^2$;

пространство $\mathfrak{D}^1A$ замкнуто;

$$|(h^1A, h^2)| \leq G\cdot\|h^1A\|\cdot\|h^2A^*\|, \quad h^1 \in \mathfrak{D}(Q^{11}), \quad h^2 \in \mathfrak{D}(Q^{22}),$$
$$\underline{M}_r(Q^{11}) > 0.$$

Оператор Q^{11} мы называем м о д у л я р н ы м о т н о с и т е л ь н о $(Q^{11})^2$, если существует константа G такая, что $(h^1, h^1Q^{11}) \leq G\cdot(h^1, h^1(Q^{11})^2)$ для всякого вектора h^1 из $\mathfrak{D}((Q^{11})^2)$.

Чтобы произвести систематический анализ обратимости ограниченных матриц, Toeplitz и Julia расклассифицировали их на семь различных категорий. Следует, однако, отметить, что наша новая классификация, хотя и служит той же цели, основана на совершенно другом принципе; она приводит нас к исчерпывающему изучению всех 16 возможных классов. В действительности мы имеем 4 основных класса, каждый из которых состоит из 4 подклассов. Последний класс и другие тесно связанные с ним вопросы мы имеем в виду исследовать в другом месте.

Из современной теории операторов мы заимствуем термины: спектр, точечный спектр (тч. сп.), непрерывный спектр (непр. сп.), резидуальный спектр (рез. сп.) и резольвентное множество, первоначально определенные при помощи соответствующих локальных свойств обратимости исходного оператора. Это именно тот смысл, в котором мы их применяем ниже.

A. $\mathfrak{D}^1$ замкнуто, $\mathfrak{D}^1 A$ замкнуто. Тогда A ограничен, R ограничен.

$$\underline{M}_r(Q^{11})>0,\quad \underline{M}_r(Q^{22})>0;\quad \underline{M}_{Q^{11}}(I^1)>0,\quad \underline{M}_{Q^{22}}(I^2)>0.$$

1) $\mathfrak{M}^1 A=\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}^2 A^*=\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}(Q^{11})>0,\quad \underline{M}(Q^{22})>0;\quad AR=I^1,\quad RA=I^2.$$

$\lambda=0$ есть точка резольвентного множества оператора A и резольвентного множества оператора A^*.

2) $\mathfrak{M}^1 A=\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}^2 A^*\neq\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}(Q^{11})=0,\quad \underline{M}(Q^{22})>0;\quad AR=P^1,\quad RA=I^2.$$

$\lambda=0$ принадлежит тч. сп. оператора A и рез. сп. оператора A^*.

3) $\mathfrak{M}^1 A\neq\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}^2 A^*=\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}(Q^{11})>0,\quad \underline{M}(Q^{22})=0;\quad AR+I^1,\quad RA=P^2.$$

$\lambda=0$ принадлежит рез. сп. оператора A и тч. сп. оператора A^*.

4) $\mathfrak{M}^1 A\neq\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}^2 A^*\neq\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}(Q^{11})=0,\quad \underline{M}(Q^{22})=0;\quad AR=P^1,\quad RA=P^2.$$

$\lambda=0$ принадлежит тч. сп. оператора A и тч. сп. оператора A^*.

B. $\mathfrak{D}^1$ замкнуто, $\mathfrak{D}^1 A$ незамкнуто.

Тогда A ограничен, R неограничен.

$$\underline{M}_{Q^{11}}(I^1)>0,\quad \underline{M}_{Q^{22}}(I^2)>0;\quad \underline{M}_r(Q^{11})=0,\quad \underline{M}_r(Q^{22})=0.$$

1) $\mathfrak{M}^1 A$ плотно в $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}^2 A^*$ плотно в $\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}((Q^{11})^{-1})>0,\quad \underline{M}((Q^{22})^{-1})>0;$$

$$AR=I^1 \text{ на } \mathfrak{M}^1,\quad RA=I^2 \text{ на } \mathfrak{D}(R).$$

$\lambda=0$ принадлежит непр. сп. оператора A и непр. сп. оператора A^*.

2) $\mathfrak{M}^1 A$ плотно в $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}^2 A^*$ неплотно в $\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}((Q^{11})^{-1}) = 0, \quad \underline{M}((Q^{22})^{-1}) > 0;$$

$$AR = P^1 \text{ на } \mathfrak{M}^1, \quad RA = I^2 \text{ на } \mathfrak{D}(R).$$

$\lambda = 0$ принадлежит тч. сп. оператора A и рез. сп. оператора A^*.

3) $\mathfrak{M}^1 A$ неплотно в $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}^2 A^*$ плотно в $\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}((Q^{11})^{-1}) > 0, \quad \underline{M}((Q^{22})^{-1}) = 0;$$

$$AR = I^1 \text{ на } \mathfrak{M}^1, \quad RA = P^2 \text{ на } \mathfrak{D}(R).$$

$\lambda = 0$ принадлежит рез. сп. оператора A и тч. сп. оператора A^*.

4) $\mathfrak{M}^1 A$ неплотно в $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}^2 A^*$ неплотно в $\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}((Q^{11})^{-1}) = 0, \quad \underline{M}((Q^{22})^{-1}) = 0;$$

$$AR = P^1 \text{ на } \mathfrak{M}^1, \quad RA = P^2 \text{ на } \mathfrak{D}(R).$$

$\lambda = 0$ принадлежит тч. сп. оператора A и тч. сп. оператора A^*.

C. $\mathfrak{D}^1$ незамкнуто, $\mathfrak{D}^1 A$ замкнуто.

Тогда A неограничен, R ограничен.

$$\underline{M}_{Q^{11}}(I^1) = 0, \quad \underline{M}_{Q^{22}}(I^2) = 0; \quad \underline{M}_r(Q^{11}) > 0, \quad \underline{M}_r(Q^{22}) > 0.$$

1) $\mathfrak{D}^1 A$ плотно в $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{R}(A^*)$ плотно в $\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}(Q^{11}) > 0, \quad \underline{M}(Q^{22}) > 0;$$

$$AR = I^1 \text{ на } \mathfrak{D}(A), \quad RA = I^2 \text{ на } \mathfrak{M}^2.$$

$\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора A и резольвентному множеству оператора A^*.

2) $\mathfrak{D}^1 A$ плотно в $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{R}(A^*)$ неплотно в $\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}(Q^{11}) = 0, \quad \underline{M}(Q^{22}) > 0;$$

$$AR = P^1 \text{ на } \mathfrak{D}(A), \quad RA = I^2 \text{ на } \mathfrak{M}^2.$$

$\lambda = 0$ принадлежит тч. сп. оператора A и рез. сп. оператора A^*.

3) $\mathfrak{D}^1 A$ неплотно в $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{R}(A^*)$ плотно в $\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}(Q^{11}) > 0, \quad \underline{M}(Q^{22}) = 0;$$

$$AR = I^1 \text{ на } \mathfrak{D}(A), \quad RA = P^2 \text{ на } \mathfrak{M}^2.$$

$\lambda = 0$ принадлежит рез. сп. оператора A и тч. сп. оператора A^*.

4) $\mathfrak{D}^1 A$ неплотно в $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{R}(A^*)$ неплотно в $\mathfrak{M}^1$:

$$\underline{M}(Q^{11}) = 0, \quad \underline{M}(Q^{22}) = 0;$$

$$AR = P^1 \text{ на } \mathfrak{D}(A), \quad RA = P^2 \text{ на } \mathfrak{M}^2.$$

$\lambda = 0$ принадлежит тч. сп. оператора A и тч. сп. оператора A^*.

Поступило
4 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Ю. Тсенг, ДАН, 67, № 3 (1949).