Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. В. ЛАМБИН

О СУЩЕСТВЕННО-ОСОБЫХ ТОЧКАХ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТОПОЛОГИЧЕСКИ РАЗЛИЧНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ, ОТЛИЧНЫХ ОТ НУЛЯ И БЕСКОНЕЧНОСТИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 VI 1948)

Используя метод разложения окрестности существенно-особой точки на характеристические области [1], можно доказать следующую теорему (доказанную в цитированной работе при $n=1$).

Теорема 1. *Если $f(z)$ голоморфна, однозначна, не обращается в нуль и имеет не обращающуюся в нуль производную в окрестности бесконечно удаленной точки и если при $z\to\infty$ множество топологически различных путей, по которым достигаются асимптотические значения $f(z)$, отличные от нуля и бесконечности, конечно и равно n, то*

$$f(z)=Ce^{\int_a^z R(t)e^{\omega(t)}dt},$$

где $R(t)$ — рациональная функция, а $\omega(t)$ имеет на бесконечности полюс порядка n.

Из этой теоремы получаем следующую теорему, относящуюся к целым функциям:

Теорема 2. *Если целая функция $f(z)$ обращается в нуль только в конечном числе точек, если ее производная обращается в нуль только в конечном числе точек и если существует только конечное число n топологически различных путей, по которым достигаются асимптотические значения $f(z)$, отличные от нуля и бесконечности, то*

$$f(z)=Ce^{\int_a^z R(t)e^{p(t)}dt},$$

где $R(t)$ — рациональная функция, а $p(t)$ — полином степени n.

Следует заметить, что указанная в цитированной работе единственность разложения на характеристические области и связанное с нею замечание о возможности такого способа деления на характеристические области, чтобы ни одна из них не являлась частью другой области такого же вида, хотя бы при другом способе деления, верно лишь для аналитических функций, удовлетворяющих некоторому условию, что, однако, не влияет на дальнейшие выводы, если внести соответствующее изменение в определение характеристической области. Условие это следующее: множество точек пересечения линий равного аргумента функции $f(z)$, по которым достигаются в точке $z = \infty$ асимптотические значения, отличные от нуля и бесконечности, с любым отрезком линии равного модуля $f(z)$, лежащим внутри области голоморфности $f(z)$, должно быть нигде не плотным на этом отрезке.

Поступило
2 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Ламбин, ДАН, **25**, № 6 (1939).