Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

О ПРОЕКТИВНОСТИ НОМОГРАММ M-ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 V 1949)

Под анаморфозою функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ $(n \geqslant 3)$ понимается представление ее в виде некоторого детерминанта Массо

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv |f_{i1}(t_i); f_{i2}(t_i); \ldots; f_{in}(t_i)|. \tag{1}$$

Здесь важно найти те условия, при которых это представление для данной функции возможно; исследовать вопрос о классах проективно различных номограмм, отвечающих представлениям (1); указать эффективные методы получения анаморфоз.

Для случая трех переменных задачу анаморфозы функции рассматривали ([1-4]) и др.; однако полного решения ни один из указанных вопросов этой задачи не получил.

Для случая полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ эти вопросы были автором рассмотрены ранее ([5]). В данной работе исследуется вопрос о единственности анаморфоз вещественной функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с $n \geqslant 3$ переменными в том предположении, что размерность этой функции равна n хотя бы в отношении одной из переменных.

Пусть $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — некоторая функция области G n-мерного евклидова пространства и $F(t_1)$ — семейство всех функций

$$F(t_1, \alpha) \equiv F(t_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{2}$$

зависящее от $(n-1)$ параметров α_i значений переменных $t_2, \ldots, t_n$ в области G. Назовем функцию $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ номографически рациональной (N-рациональной) по t_1, если существует конечное число функций

$$\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_1), \ldots, \varphi_r(t_1) \tag{3}$$

таких, что каждая функция $F(t_1, \alpha)$ семейства $F(t_1)$ является их линейной комбинацией. Систему (3) назовем системой образующих по t_1 функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, r — размерностью этой системы.

В том случае, когда функции (3) линейно независимы (в G), то $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ может быть однозначно представлена в виде линейного ее по t_1 разложения

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv \sum_{j=1}^{r} F_j^{(t)} \varphi_j(t_1), \tag{4}$$

где $F_j^{(t)} \equiv F_j(t_2, \ldots, t_n)$ — коэффициенты разложения.

Систему образующих (3) будем называть базой по t_1 функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, если из линейных комбинаций функций (3) нельзя построить для $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ никакой системы образующих (по t_1) размерности, меньшей r.

Очевидно, что за базу по t_1 фунции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ можно принять любые r линейно независимых функций

$$F(t_1, \alpha^{(1)}), \ldots, F(t_1, \alpha^{(r)}) \tag{5}$$

семейства $F(t_1)$, если только r — максимальное число таких функций этого семейства. Нетрудно показать, что всякая система образующих (3) тогда и только тогда будет для $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ базой по t_1, если ее размерность (в G) равна r; r назовем размерностью по t_1 функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Ясно, что функция $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, допускающая анаморфозу (1), N-рациональна по каждой из переменных с размерностью не более n.

Две базы по t_1, (3) и

$$\overline{\varphi}_1(t_1), \ldots, \overline{\varphi}_r(t_1) \tag{3'}$$

связаны линейным преобразованием

$$\overline{\varphi}_j(t_1) \equiv \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \varphi_j(t_1) \tag{6}$$

с неособенной матрицей $\|c_{ij}\|$.

Можно показать, что в заданном линейном разложении (4) функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ система образующих (3) будет тогда и только тогда являться базой по t_1, если функции системы (3) линейно независимы и таковы же коэффициенты $F_j^{(t)}$ $(j = 1, \ldots, r)$. В этом случае разложение (4) назовем базисным по t_1.

Будем считать, что $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ не является вырожденной функцией, т. е. что она не может быть представлена в виде произведения двух функций, ни одна из которых не содержит всех n переменных; такую функцию, допускающую, кроме того, анаморфозу (1), будем называть M-функцией (функцией Массо).

M-функция геометрически интерпретируется номограммой из n помеченных базисов C_i переменных t_i, базисов, лежащих в $(n-1)$-мерном проективном пространстве X; при этом очевидно, что базисы C_i k переменных t_i $(i = 1, \ldots, k)$ ни в какой анаморфозе M-функции не могут принадлежать общему линейному подпространству (из X) меньшему k измерений.

В том случае, когда размерность по t_1 M-функции равна r_1, всегда существует неособенное проективное преобразование анаморфозы (1), переводящее r_1 элементов первой строки (1) в элементы какой-либо заданной базы по t_1 функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ (а остальные $(n - r_1)$ элементов в нули). Это означает, что измерение ρ_i минимального линейного подпространства (из X), содержащего базис C_i, есть инвариант M-функции: именно, $\rho_i = r_i - 1$, где r_i — размерность $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ по t_i; для случая функции $F(t_1, t_2, t_3)$ из этого следует инвариантность жанра номограмм.

Пусть теперь существует для данной M-функции номограмма, определяемая анаморфозой (1), причем хотя бы в одной из строк (например, в первой) все элементы линейно независимы; это означает, что размерность $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ по t_1 равна n и $f_{1j}(t_1)$ образуют базу по t_1 функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, и поэтому во всякой другой анаморфозе

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv |\overline{f}_{i1}(t_i); \overline{f}_{i2}(t_i); \ldots ; \overline{f}_{in}(t_i)| \tag{7}$$

после надлежащего ее проективного преобразования $\overline{f}_{1j}(t_1) \equiv f_{1j}(t_1)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Разлагая (1) и (7) по элементам первой строки, получим тождество

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv \sum_{j=1}^{n} f_{1j}(t_1) F_j^{(t)} \equiv \sum_{j=1}^{n} \overline{f}_{1j}(t_1) \overline{F}_j^{(t)}, \tag{8}$$

где $F_j^{(t)} \equiv \overline{F}_j^{(t)}$; отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} \overline{f}_{i1}(t_i) & \overline{f}_{i2}(t_i) & \dots & \overline{f}_{in}(t_i) \\ f_{21}(t_2) & f_{22}(t_2) & \dots & f_{2n}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1}(t_i) & f_{i2}(t_i) & \dots & f_{in}(t_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t_n) & f_{n2}(t_n) & \dots & f_{nn}(t_n) \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{9}$$

(для любого $i = 2, \dots, n$).

Но это последнее тождество возможно для невырожденной функции $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ лишь при условии тождественности шкал переменной t_i в анаморфозах (1) и (7).

Таким образом, оказывается справедливой теорема о проективности номограмм: если существует для M-функции номограмма, в которой хотя бы один из базисов C_i не принадлежит никакой гиперплоскости $(n-1)$-мерного пространства X, то все номограммы этой функции проективны.

Теорема о проективности номограмм может не иметь места для M-функции $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$, размерность которой по каждой из переменных менее n; известным примером этому является случай функции $F(t_1, t_2, t_3)$ третьего номографического порядка с дискриминантом, отличным от нуля ([6]).

Поступило
11 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D u p o r c q, C. R., **127** (1895). [2] O. D. K e l l o g g, Zs. f. Math. u. Phys., **63**, 159 (1914). [3] M. D'O c a g n e, Traité de Nomographie, Paris, 1921. [4] Х. А. Б и т н е р, Номографическ. сб., М., 1935. [5] П. В. Н и к о л а е в, ДАН, **28**, № 7, № 9 (1940). [6] П. В. Н и к о л а е в, Уч. зап. МГУ, в. 73, кн. 5, 105 (1944).