Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

Ф. Д. ГАХОВ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ n ПАР ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 7 VI 1949)

§ 1. Пусть L есть контур, состоящий из некоторого числа простых замкнутых кривых, достаточно гладких, ограничивающих связную область S^+ и дополнительную к ней область S^-. В дальнейшем, для определенности (что несущественно), будем считать, что начало координат находится в области S^+, а бесконечно удаленная точка — в области S^-.

Под краевой задачей Римана для системы n пар функций понимается следующая задача. Определить n пар функций $\varphi_i^+(z)$, $\varphi_i^-(z)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, голоморфных, соответственно, в областях S^+, S^-, предельные значения которых на контуре L непрерывны и удовлетворяют следующим n линейным соотношениям:

$$\varphi_i^+(t) = a_{i1}(t)\varphi_1^-(t) + \ldots + a_{in}(t)\varphi_n^-(t) + b_i(t), \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ — заданные функции комплексных координат t точек контура, удовлетворяющие условию Гельдера и дополнительному условию, что определитель $|a_{ij}(t)|$ не обращается в нуль на контуре. Если $b_i(t)=0$, будем иметь однородную задачу, если отличны от нуля,— неоднородную.

Задачу (1) поставил Риман в работе о дифференциальных уравнениях с алгебраическими коэффициентами в связи с задачей о построении линейного дифференциального уравнения с заданной группой монодромии. Решением задач (1), (2) занимались Гильберт, Племели, Ф. Д. Гахов, Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа. Наиболее полные результаты получены в совместной работе двух последних авторов (1).

В дальнейшем, следуя Н. И. Мусхелишвили, будем совокупность $2n$ искомых функций называть кусочно-голоморфным вектором и обозначать просто $\varphi(z)$, считая, что этот вектор имеет составляющие в области S^+ $\varphi_1^+(z), \ldots, \varphi_n^+(z)$, а в области S^- $\varphi_1^-(z), \ldots, \varphi_n^-(z)$. Обозначая матрицу коэффициентов $\|a_{ij}(t)\|$ через $A(t)$, краевое условие (1) запишем в матричной форме в виде одного уравнения

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + b(t). \tag{1'}$$

Основная проблема заключается в построении совокупности n решений задачи (так называемой канонической системы), обладающей двумя свойствами: 1) определитель системы не обращается в нуль нигде в конечной части плоскости; 2) сумма порядков * на бесконечности решений системы равна порядку определителя системы.

* Под порядком решения на бесконечности понимается наивысшая степень z в разложении всех функций, составляющих решение, в окрестности бесконечно удаленной точки.

Порядки решений на бесконечности, играющие важнейшую роль, Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа назвали частными индексами задачи. В общем случае построение канонической системы производится при помощи решения некоторой системы интегральных уравнений Фредгольма.

§ 2. В настоящей работе решается задача Римана для случая, когда матрица коэффициентов может быть представлена в виде произведения матриц $\Omega^+\Omega^-$, составленных из краевых значений функций, голоморфных, соответственно, в областях S^+ и S^-:

$$\varphi^+(t) = \Omega^+(t)\,\Omega^-(t)\,\varphi^-(t), \tag{2}$$

где $\Omega^+(t) = \| \omega_{ij}^+(t) \|$ — матрица, элементы которой — краевые значения функций, аналитических в S^+; $\Omega^-(t) = \| \omega_{ij}^-(t) \|$ — матрица с элементами — краевыми значениями функций, аналитических в S^-.

§ 3. Пусть $\operatorname{Ind} | \Omega^+(t) | = m$, т. е. аналитическая в области S^+ функция $| \Omega^+(z) |$ имеет m нулей в этой области. В качестве первого преобразования представим матрицу $\Omega^+(z)$ в виде произведения двух матриц, причем первый множитель имеет элементы того же характера, что и матрица $\Omega^+(z)$, но определитель не имеет нулей в области S^+, а второй множитель — полиномная матрица, нули определителя которой совпадают с нулями определителя $| \Omega^+(z) |$.

Пусть z_0 есть нуль порядка p определителя $| \Omega^+(z) |$. Вычислим разложение определителя в окрестности z_0. Пусть α_j — низшая степень разложения элементов j-го столбца в окрестности z_0.

$$| \Omega^+(z) | = \begin{vmatrix} a_{11}(z-z_0)^{\alpha_1} + \ldots, \ldots, a_{1n}(z-z_0)^{\alpha_n} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(z-z_0)^{\alpha_1} + \ldots, \ldots, a_{nn}(z-z_0)^{\alpha_n} + \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= (z-z_0)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\,[\,| a_{ij} | + \ldots].$$

Если элемент $\omega_{ij}(z)$ имеет начальный член разложения по степеням $z - z_0$ выше α_j, то коэффициент a_{ij} нужно положить равным нулю. Очевидно, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant p$. Знак равенства может иметь место тогда и только тогда, если определитель $| a_{ij} | \neq 0$.

Если определитель $| a_{ij} |$ равен нулю, то можно произвести такое элементарное преобразование столбцов, равносильное умножению справа на полиномную матрицу с постоянным определителем, что порядок некоторого столбца относительно $z - z_0$ повысится. Подобное преобразование можно применять до тех пор, пока определитель $| a_{ij} |$ не станет отличным от нуля, т. е. пока сумма порядков столбцов не станет равной порядку определителя. Вынеся множители столбцов в виде диагональной матрицы множителем справа, придем к матрице, определитель которой не обращается в нуль в точке z_0. Поступив так со всеми нулями определителя $| \Omega^+(z) |$, получим:

Теорема 1. *Матрица $\Omega^+(z)$, элементы которой аналитические в области S^+ функции, а определитель обращается в нуль в этой области в конечном числе точек, может быть представлена в виде произведения матрицы $X(z)$ с элементами того же характера, что и у матрицы $\Omega^+(z)$, и полиномной матрицы $Q(z)$, определитель которой имеет нули, совпадающие с нулями определителя $| \Omega^+(z) |$:*

$$\Omega^+(t) = X^+(t)\,Q(t).$$

Матрица $U(z) = Q(z)\,\Omega^-(z)$ будет иметь своими элементами функции, аналитические в области S^-, за исключением бесконечно удаленной точки, где они могут иметь полюс. Такие матрицы в дальнейшем для краткости будем называть U-матрицами.

Оперируя строками так же, как ранее столбцами, можно доказать:

Теорема 2. *U-матрицу можно представить в виде произведения полиномной матрицы с определителем, имеющим нули, совпадающие с нулями определителя $|\Omega^-(z)|$, лежащими в конечной части области S^-, и U-матрицы с определителем, не обращающимся в нуль в конечной части области S^-.*

Определение 1. Порядком строки U-матрицы будем называть наивысшую степень элементов строки. Наивысшую степень определителя назовем его порядком.

Определение 2. Если сумма порядков строк равна порядку определителя, то будем говорить, что U-матрица имеет нормальную форму. Способом, аналогичным тому, каким были доказаны теоремы 1 и 2, можно доказать теорему 3.

Теорема 3. *Всякую U-матрицу можно привести к нормальной форме умножением слева на полиномную матрицу с постоянным определителем.*

Путем комбинации теорем 1, 2 и 3 можно получить теорему 4.

Теорема 4. *Матрицу $\Omega^+(z)\,\Omega^-(z)$ можно представить в виде произведения матрицы $\Psi(z)$ с элементами того же характера, что и матрица Ω^+, и с определителем, не обращающимся в нуль в S^+, и U-матрицы в нормальной форме $R(z)$, определитель которой не обращается в нуль в конечной части области S^-.*

Методом, аналогичным примененному в книге ([2]), стр. 177—181, можно доказать теорему 5.

Теорема 5. *Порядки строк U-матрицы в нормальной форме равны элементарным делителям U-матрицы относительно бесконечно удаленной точки.*

Далее нам еще понадобится легко доказуемая теорема 6.

Теорема 6. *Если U-матрица в нормальной форме R имеет порядками строк числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$, то обратная ей матрица R^{-1} имеет порядками столбцов соответственно числа $-\varkappa_1, \ldots, -\varkappa_n$.*

§ 4. На основании теоремы 4 краевое условие можно записать:

$$\varphi^+(t) = \Psi(t)\,R(t)\,\varphi^-(t). \tag{3}$$

Теперь нетрудно доказать, что матрицы

$$X^+(z) = \Psi(z), \qquad X^-(z) = R^{-1}(z) \tag{4}$$

будут представлять канонические матрицы решений краевой задачи.

В самом деле, непосредственная подстановка показывает, что матрицы (4) удовлетворяют краевому условию (3). С другой стороны, элементы матрицы $\Psi(z)$ — аналитические в области S^+ функции с определителем, не обращающимся в нуль, а элементы $R^{-1}(z)$ — аналитические в S^- функции, за исключением разве что бесконечно удаленной точки, где они могут иметь полюсы; определитель $|R^{-1}(z)| = 1/|R(z)|$ не имеет нулей в конечной части области S^-. Далее, на основании теоремы 6 сумма порядков столбцов матрицы $R^{-1}(z)$ на бесконечности в точности равна порядку определителя. Следовательно, матрицы (4) удовлетворяют всем условиям, накладываемым на канонические системы.

По определению, порядки на бесконечности решений канонической системы с обратными знаками — частные индексы краевой задачи Римана. Таким образом, частные индексы, равные, на основании теоремы 6, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$, на основании теоремы 5 являются элементарными делителями матрицы R относительно бесконечно удаленной точки.

Процесс отыскания частных индексов может быть описан так. При помощи элементарных преобразований столбцов матрицы Ω^+ выделяем из нее множителем справа полиномную матрицу Q, определитель которой имеет нули, совпадающие с нулями определителя $|\Omega^+(z)|$ в S^+. Из произведения $U = Q\Omega^-$ элементарными преобразованиями строк выделяется множителем слева полиномная матрица Q_1, определитель которой имеет нули, совпадающие с нулями Ω^- в конечной части S^-. $U = Q_1 R$. Тогда элементарные делители матрицы $R(z)$ относительно бесконечно удаленной точки и будут частными индексами задачи. Попутно находится и сама каноническая система.

§ 5. На основании общей теории, после того как найдена каноническая система $X(z)$, находится общее решение однородной задачи

$$\varphi(z) = X(z) P(z), \tag{5}$$

где $P(z)$ — вектор, составляющие которого — полиномы со степенями, равными частным индексам, уменьшенным на единицу (при $\varkappa_j - 1 < 0$ полином — тождественный нуль). Общее решение неоднородной задачи определяется формулой

$$\varphi(z) = X(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int \frac{[X^+(t)]^{-1} b(t)}{t - z} dt + P(z) \right]. \tag{6}$$

Пользуясь известной связью между краевой задачей (1) и системой сингулярных интегральных уравнений, можно получить решение характеристической системы сингулярных интегральных уравнений соответствующего типа и исследование соответствующей полной системы.

§ 6. Рассмотренный случай включает в себя как частные все случаи, для которых до сих пор давались эффективные решения. Н. П. Векуа и Д. А. Квеселава в двух работах ([3], [4]) рассматривали случай, когда матрица коэффициентов имеет вид

$$\Omega^-(t) \, \| a_j(t) \| ,$$

где $\| a_j(t) \|$ — диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят произвольные функции $a_j(t)$. Заменяя на основании решения задачи Римана для одной пары функций произвольную функцию $a_j(t)$ через отношение краевых значений функций, соответственно аналитических в S^+ и S^-, мы получим частный случай рассмотренной задачи, когда матрица $\Omega^-(t)$ диагональная.

Упомянутые выше два автора рассматривали, хотя и не упоминая об этом явно, частный случай задачи, когда определитель $|\Omega^+(z)|$ не имеет нулей в области S^+. Случай этот не представляет никаких трудностей, так как частные индексы здесь сразу даны, они являются индексами функций $a_j(t)$. Для общего случая трудности были бы те же, что и для рассмотренной здесь более общей задачи.

Недавно в работе ([5]) Н. П. Векуа рассмотрел более частный случай, когда элементы матрицы — рациональные функции. Здесь учитывалась и возможность нулей определителя в области S^+. Автор в основном пользуется теоремами о приведении полиномной матрицы к канонической форме. Показывается алгорифм для получения канонической системы, частные индексы не исследуются.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
19 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 12 (1943). [2] K. Hensel u. G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen, Leipzig, 1902. [3] Н. П. Векуа и Д. А. Квеселава, Сообщ. АН ГССР, 2, № 3 (1941). [4] Н. П. Векуа и Д. А. Квеселава, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 9 (1941). [5] Н. П. Векуа, Сообщ. АН ГССР, 7, № 9—10 (1946).