Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

О. А. ОЛЕЙНИК

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ БЕТТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 V 1949)

Пусть $F(x_1, \ldots, x_m)$ — многочлен степени n относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с действительными коэффициентами. Будем предполагать, что система уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_m} = 0, \quad F = 0$$

не имеет действительных конечных или бесконечных решений. Через Г будем обозначать множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$ m-мерного проективного пространства P_m, где

$$x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) = 0.$$

Через M будем обозначать замыкание в P_m множества точек, для которых

$$x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) \geqslant 0 \quad \text{при } x_{m+1} = 1.$$

Всюду в дальнейшем через $\sigma(k)$ будем обозначать сумму всех чисел Бетти полиэдра k, через $\sigma_1(k)$ — сумму всех его четномерных чисел Бетти и через $\sigma_2(k)$ — сумму всех его нечетномерных чисел Бетти. Все числа Бетти рассматриваются по модулю 2. Через $S(m, n)$ мы обозначаем число, которое равно числу членов полинома

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{n-1} - 1}{x_i - 1},$$

степень которых не превосходит $\left[\frac{mn - 2m - n}{2}\right]$ ($[N]$ означает целую часть N).

Для чисел Бетти Г и M имеют место следующие оценки:

1. Если m и n нечетные числа, то

$$\sigma_1(M) < \frac{1}{2}\left\{(n-1)^m - S(m, n) + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} + 2m\right\}.$$

Такая же оценка справедлива для $\sigma_2(M)$.

$$\sigma(M) < \frac{(n-1)^m}{2} + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} + 2m.$$

$$\sigma_1(\Gamma) < (n-1)^m - S(m, n) + \frac{m+1}{2}.$$

$$\sigma_2(\Gamma) < (n-1)^m - S(m, n) + \frac{m+1}{2}.$$

$$\sigma(\Gamma) < (n-1)^m + m.$$

2. Если n нечетное, а m — четное число, то

$$\sigma_1(M) < \frac{1}{2}\left\{(n-1)^m - S(m, n) + (n-1)^{m-1} - S(m-1, n) + 2m\right\}.$$

Такая же оценка справедлива для $\sigma_2(M)$.

$$\sigma(M) < \frac{(n-1)^m}{2} + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} + 2m.$$

$$\sigma_1(\Gamma) < \frac{(n-1)^m}{2} + \frac{m}{2}.$$

$$\sigma_2(\Gamma) < \frac{(n-1)^m}{2} + \frac{m}{2}.$$

$$\sigma(\Gamma) < (n-1)^m + m.$$

3. Если n четно, то при любом m

$$\sigma_1(M) < \frac{1}{2}\left\{(n-1)^m - S(m, n) + \frac{(n-1)^m - (n-1)}{2(n-2)} + \frac{m^2+m+2}{4}\right\}.$$

Такая же оценка верна и для $\sigma_2(M)$.

Для $\sigma(M)$ имеем:

$$\sigma(M) < \frac{1}{2}\left\{\frac{(n-1)^{m+1} - (n-1)}{(n-2)} + \frac{m(m+1)}{2}\right\}.$$

4. Если n четно, а m нечетно, то

$$\sigma_1(\Gamma) < (n-1)^m - S(m, n) + \frac{(n-1)^m - (n-1)}{2(n-2)} + m + \frac{m(m-1)}{4}.$$

Такая же оценка верна и для $\sigma_2(\Gamma)$.

$$\sigma(\Gamma) < \frac{(n-1)^{m+1} - (n-1)}{n-2} + \frac{m(m-1)}{2} + 2m.$$

5. Если n и m четные числа, то

$$\sigma_1(\Gamma) \text{ и } \sigma_2(\Gamma) \text{ равны } \frac{\sigma(\Gamma)}{2}.$$

Для $\sigma(\Gamma)$ справедлива оценка $\sigma(\Gamma)$ пункта 4.

Все предыдущие соотношения мы устанавливаем, пользуясь идеями Морса ([1]) и результатами работы ([2]), где даны оценки эйлеровой характеристики множеств Γ и M. В частности, наши соотношения дают оценку числа кусков p_0 алгебраической поверхности в трехмерном пространстве, а именно:

$$p_0 = \frac{\sigma_1(\Gamma)}{2} < \frac{(n-1)^3}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{12} + 2, \text{ если } n \text{ нечетное;}$$

$$p_0 = \frac{\sigma_1(\Gamma)}{2} < \frac{(n-1)^3}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{12} + \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{(n-1)}{4} + 2,$$

если n четное.

Поступило
10 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Morse, Trans. Am. Math. Soc., 27, 345 (1925). [2] И. Г. Петровский и О. А. Олейник, ДАН, 67, № 1 (1949).