Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

И. Я. ВЕРЧЕНКО

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 V 1949)

В этом сообщении показано, что теория дифференцирования функций прямоугольника и функций множества (см. ([1]), стр. 59 и 8) по отношению к лебеговой мере распространяется на случай дифференцирования этих функций по отношению к произвольной вполне аддитивной функции множества. Результаты изложены для евклидовой плоскости, хотя не представляет труда перенести их на любое n-мерное пространство.

1°. Пусть E — произвольное множество, лежащее на плоскости. Пусть, далее, K — круг, целиком принадлежащий множеству E. Будем говорить, что круг K виден по множеству E под углом θ из точки (x, y) этого множества, не принадлежащей кругу K, если угол между касательными к кругу K, проведенными из точки (x, y), равен θ и если треугольник, ограниченный этими касательными и прямолинейным отрезком, соединяющим точки касания, целиком принадлежит множеству E.

Пусть θ — положительное число. Точку (x_0, y_0) будем называть θ-точкой множества E, если существует круг K с центром в точке (x_0, y_0), который целиком принадлежит множеству E и который виден по множеству E под углом не меньше, чем θ, из каждой точки этого множества, не принадлежащей кругу K.

Последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ называется регулярной в точке (x_0, y_0), если существует положительное число θ такое, что для каждого индекса n точка (x_0, y_0) является θ-точкой множества E_n. Эта последовательность называется, кроме того, сходящейся к точке (x_0, y_0), если диаметр множества E_n стремится к нулю с возрастанием индекса n.

Будем говорить, что множество M покрыто в смысле Витали семейством множеств $\mathfrak{E}$, если для каждой точки (x, y) множества M можно выбрать в семействе $\mathfrak{E}$ последовательность множеств E_1, $E_2, \ldots E_n, \ldots$, регулярную в точке (x, y) и сходящуюся к ней.

Пусть $\Phi(X)$ — произвольная неотрицательная вполне аддитивная функция множества, определенная на аддитивном классе множеств, включающем в себя класс борелевых множеств *. Пусть Y — совершенно произвольное множество. Обозначим через $\Phi^*(Y)$ нижнюю грань множества чисел $\Phi(B)$ для всех борелевых множеств $B \supset Y$.

* В этом сообщении будем рассматривать только такие вполне аддитивные функции множества, которые определены на аддитивном классе множеств, включающем в себя класс борелевых множеств.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(X)$ — произвольная неотрицательная вполне аддитивная функция множества. Тогда, если множество M покрыто в смысле Витали семейством замкнутых множеств, то в этом семействе содержится конечная или счетная последовательность множеств $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$, попарно без общих точек и таких, что*

$$\Phi^*\left(M - \sum_{n=1}^{\infty} MZ_n\right) = 0.$$

Эта теорема легко следует из леммы, доказываемой на основании элементарно-геометрических свойств множеств, обладающих θ-точками.

Лемма. *Пусть θ — положительное число, не превышающее единицы. Пусть, далее, $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ — последовательность множеств, удовлетворяющих условиям:* 1) *каждое множество последовательности обладает θ-точками;* 2) *в каждом множестве последовательности существует θ-точка этого множества, не принадлежащая сумме предыдущих множеств этой последовательности;* 3) *диаметр каждого множества последовательности меньше удвоенного диаметра каждого предыдущего множества этой последовательности.*

Тогда эта последовательность множеств распадается на p подпоследовательностей, в каждой из которых множества попарно без общих точек. При этом p — целое положительное число порядка c/θ^4, где c — константа.

2°. Пусть $T(X)$ и $\Phi(X)$ — две произвольные функции множества. Будем называть верхней относительной производной функции $T(X)$ по функции $\Phi(X)$ в точке (x, y) верхнюю грань множества чисел l, для каждого из которых существует регулярная в точке (x, y) и сходящаяся к ней последовательность замкнутых множеств $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ таких, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T(Z_n)}{\Phi(Z_n)} = l.$$

Эту производную будем обозначать через $\overline{T}_\Phi(x, y)$.

Симметрично определяется нижняя относительная производная $\underline{T}_\Phi(x, y)$ функции $T(X)$ по функции $\Phi(X)$ в точке (x, y).

В том случае, когда в точке (x, y) обе производные $\overline{T}_\Phi(x, y)$ и $\underline{T}_\Phi(x, y)$ равны, их значение называется относительной производной функции $T(X)$ по функции $\Phi(X)$ в точке (x, y) и обозначается через $T_\Phi(x, y)$.

Пусть теперь $\Phi(X)$ — произвольная вполне аддитивная функция множества. Как известно, $\Phi(X)$ есть разность двух неотрицательных вполне аддитивных функций множества $\Phi_1(X)$ и $\Phi_2(X)$, определенных на том же аддитивном классе множеств, что и $\Phi(X)$. Положим для произвольного множества Y $\Phi^*(Y) = \Phi_1^*(Y) - \Phi_2^*(Y)$.

Теорема 2. *Пусть $T(X)$ и $\Phi(X)$ — две произвольные вполне аддитивные функции множества.*

Тогда: 1) *всюду, за исключением множества N такого, что $\Phi^*(N) = 0$, существует конечная относительная производная $T_\Phi(x, y)$;* 2) *всюду, за исключением множества N_1 такого, что $T^*(N_1) = \Phi^*(N_1) = 0$, существуют конечные или бесконечные относительные производные $T_\Phi(x, y)$ и $\Phi_T(x, y)$.*

Пусть $\Phi(X)$ — произвольная вполне аддитивная функция множества Множество Y называется (B, Φ)-измеримым, если существует борелево множество B такое, что

$$\Phi^*(Y - B) = \Phi^*(B - Y) = 0$$

Пусть E — произвольное множество. Точку (x, y) будем называть точкой внешней плотности множества E по отношению к $\Phi(X)$, если, какова бы ни была регулярная в точке (x, y) и сходящаяся к ней последовательность замкнутых множеств $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$, выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Phi^*(EZ_n)}{\Phi(Z_n)} = 1.$$

Точку (x, y) будем называть точкой разрежения множества E по отношению к $\Phi(X)$, если при тех же условиях выполняется соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Phi^*(EZ_n)}{\Phi(Z_n)} = 0.$$

Теорема 3. *Пусть $\Phi(X)$ — произвольная вполне аддитивная функция множества. Тогда каждая точка произвольного множества E, за исключением множества N такого, что $\Phi^*(N) = 0$, является точкой внешней плотности этого множества относительно $\Phi(X)$, а если множество E (B, Φ)-измеримо, то, кроме того, каждая точка его дополнения, за исключением множества N_1 такого, что $\Phi^*(N_1) = 0$, есть точка разрежения множества E относительно $\Phi(X)$.*

3°. Определение регулярности последовательности множеств в точке (x, y) для последовательности прямоугольников принимает вид:

Последовательность прямоугольников $R_1, R_2, \ldots R_n, \ldots$ регулярна в точке (x, y), если она принадлежит каждому прямоугольнику этой последовательности и если существует положительное число ϑ такое, что для каждого n

$$\frac{r[(x, y), R_n]}{R[(x, y), R_n]} \geqslant \vartheta,$$

где $r[(x, y), R_n]$ и $R[(x, y), R_n]$ — соответственно, расстояния точки (x, y) до ближайшей и до наиболее удаленной стороны прямоугольника R_n.

С помощью этого понятия регулярной последовательности прямоугольников в точке обычным способом определяются верхняя $\overline{F}_\Phi(x, y)$, нижняя $\underline{F}_\Phi(x, y)$ и просто производная $F_\Phi(x, y)$ в точке (x, y) произвольной функции прямоугольника $F(R)$ по отношению к $\Phi(X)$.

Пусть $F(R)$ — аддитивная функция прямоугольника с ограниченной вариацией. Обозначим через $F^*(X)$ функцию множества, полученную обычным распространением функции прямоугольника $F(R)$ на произвольные множества (см. ([1]), стр. 69 и 70).

Теорема 4. *Пусть $F(R)$ — аддитивная функция прямоугольника с ограниченной вариацией. Тогда всюду, за исключением множества N такого, что $\Phi^*(N) = 0$, существует конечная относительная производная $F_\Phi(x, y)$ и всюду вне этого множества выполняется равенство*

$$F_\Phi(x, y) = \overset{*}{F}_\Phi(x, y).$$

Функция $f(x, y)$ называется (B, Φ)-измеримой на множестве E, если множество E (B, Φ)-измеримо и если для каждого действительного числа c множество $\underset{x, y}{E}\{f(x, y) > c\}$ также (B, Φ)-измеримо.

Теорема 5. *Относительная производная $T_\Phi(x, y)$ любой вполне аддитивной функции множества $T(X)$, а также относительная производная $F_\Phi(x, y)$ любой аддитивной функции прямоугольника*

$F(R)$ с ограниченнай вариацией являются (B, Φ)-измеримыми функциями.

Теорема 6. *Пусть $T(X)$ и $\Phi(X)$ — неотрицательные вполне аддитивные функции множества. Тогда для любого (B, Φ)-измеримого множества X выполняется равенство*

$$T(X) = \int_X T_\Phi(x, y)\, d\Phi + T(E_\infty X),$$

где $E_\infty = \underset{x,y}{E}\ \{T_\Phi(x, y) = \infty\}$.

4°. Пусть теперь $\Phi(X)$ неотрицательная вполне аддитивная функция множества.

Последовательность замкнутых множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ называется (Φ)-регулярной в точке (x, y) и сходящейся к ней, если существует положительное число ϑ и регулярная в точке (x, y) и сходящаяся к ней последовательность замкнутых множеств $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ таких, что для каждого n $Z_n \supset X_n$ и

$$\frac{\Phi(X_n)}{\Phi(Z_n)} \geqslant \vartheta.$$

Будем говорить, что семейство замкнутых множеств покрывает множество E в смысле (Φ)-Витали, если для каждой точки (x, y) множества E в этом семействе найдется последовательность множеств, (Φ)-регулярная в этой точке и сходящаяся к ней.

С помощью этих понятий доказывается более общая теорема о покрытиях, содержащая в себе обычную теорему Витали; затем определяется общая относительная производная $D_\Phi T(x, y)$ произвольной функции множества $T(X)$ по отношению к $\Phi(X)$.

Теорема 7. *Для любой вполне аддитивной функции множества $T(X)$ всюду, за исключением множества N такого, что $\Phi^*(N) = 0$, выполняется равенство*

$$D_\Phi T(x, y) = T_\Phi(x, y).$$

Поступило
4 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Saks, Theory of Integral, Warszawa, 1937.