Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. Ш. АЛЬТМАН

О БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VI 1949)

Пусть E — линейное сепарабельное пространство типа Банаха и $\{x_i\}, \{F_i\}$ — биортогональная система в E, причем предполагается, что последовательность $\{x_i\}$ — полная в E.

Обозначим через $\mathfrak{A}_\xi$, где $\xi = \{x_i\}$, множество всех числовых последовательностей вида $\{a_i = F_i(x)\}$, где x пробегает все E. Пусть E_1— произвольное линейное пространство типа Банаха, которое, в частности, может совпадать с пространством E, и $\{z_i\}$ — произвольная последовательность элементов из E_1. В дальнейшем будем пользоваться следующим замечанием, вытекающим непосредственно из одной теоремы Банаха:

A. Для того чтобы ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i z_i$ сильно сходились для всех $\{a_i\} \in \mathfrak{A}_\xi$, необходимо и достаточно существование константы M, удовлетворяющей следующему условию:

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} F_i(x) z_i \right\| \leqslant M \| x \| . \tag{1}$$

Доказательство. Покажем, что условие достаточно. Последовательность линейных операторов $A_n x = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i(x) z_i$ сходится на всюду плотном множестве линейных агрегатов вида $y_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} c_{in} x_i$. Из условия (1) следует ограниченность норм операторов A_n, следовательно, последовательность операторов A_n сходится слабо.

Необходимость условия следует из слабой сходимости последовательности линейных операторов A_n, которая сходится к линейному оператору

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) z_i. \tag{2}$$

Заметим, что из условия (1) следует существование линейного оператора A, переводящего последовательность $\{x_i\}$ в последовательность $\{z_i\}$, определенного формулой (2).

Из замечания А вытекает следующее обобщение теоремы 1 из [1].

Из слабой сходимости всех рядов $\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i$, $\{a_i\} \in \mathfrak{A}_\xi$, следует: 1°. Сильная сходимость этих рядов. 2°. Существование линейного оператора, переводящего последовательность $\{x_i\}$ в последовательность $\{z_i\}$, определенного формулой (2).

Доказательство. В силу слабой сходимости последовательность значений линейных операторов $A_n x = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) z_i$ ограничена в каждой точке $x \in E$, следовательно, в силу известной теоремы, выполняется условие (1) замечания А.

§ 1. Пусть $\{y_i\}, \{F_i\}$ — биортогональная система, причем не предполагается, что последовательность $\{y_i\}$ полная в E. Далее, пусть L — некоторый произвольный линейный оператор, отображающий пространство E в пространство E_1. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если биортогональная система* $\{y_i\}, \{F_i\}$ *удовлетворяет следующему условию*:

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} F_i(x)(y_i - x_i) \right\| \leqslant M \| x \|, \tag{3}$$

где M — некоторая константа, то из сходимости всех рядов $\sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) L x_i$, когда элемент x пробегает все пространство E, следует: 1°. $\sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) L x_i = Lx$. 2°. $\sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) L y_i = Lx$ *при любом* $x \in E$.

Доказательство. Равенство 1° следует непосредственно из замечания А. Докажем справедливость равенства 2°. Из условия (3) в силу замечания А следует, что оператор $y = Ax = x - \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x)(y_i - x_i)$, переводящий последовательность $\{y_i\}$ в последовательность $\{x_i\}$, линеен. Кроме того, справедливы равенства $F_i(x) = F_i(Ax)$ при любом $i = 1, 2, \ldots$

Отсюда имеем, что $\sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) L y_i = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(Ax) L x_i + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(Ax)(y_i - x_i)$. Так как первое слагаемое равно LAx, а второе слагаемое равно $Lx - LAx$, то теорема доказана.

Из теоремы 1 непосредственно следует:

Теорема 2. *Если $\{x_i\}$ — базис в E, а $\{y_i\}$, $\{F_i\}$ — биортогональная система в E, удовлетворяющая условию* (3), *причем полнота последовательности $\{y_i\}$ не предполагается, то $\{y_i\}$ — базис.*

Из условия (3) следует, что $\mathfrak{A}_\eta \subset \mathfrak{A}_\xi$, где $\xi = \{x_i\}$, $\eta = \{y_i\}$. Если потребовать, чтобы последовательность $\eta = \{y_i\}$ была базисом в E, удовлетворяющим условию $\mathfrak{A}_\eta \subset \mathfrak{A}_\xi$, то, в силу замечания А, выполнение условия (3) также необходимо, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\xi = \{x_i\}$ — базис в E, а $\{y_i\}$, $\{F_i\}$ — биортогональная система в E. Для того чтобы последовательность $\eta = \{y_i\}$ была базисом в E, удовлетворяющим условию $\mathfrak{A}_\eta \subset \mathfrak{A}_\xi$, необходимо и достаточно выполнение условия* (3).

Замечание. „Сдвиг" (3) тем отличается от „сдвига" Крейна, Мильмана и Рутмана [2], что в (3) нет ограничения $M < 1$, следовательно, как увидим ниже, теорема 2 верна даже тогда, когда не существует линейного взаимно-однозначного отображения пространства E на себя, переводящего последовательности $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ друг в друга, в то время как „сдвиг“ (2) осуществляется именно посредством такого отображения. Другими словами, с помощью „сдвига“ (2) получаем всегда эквивалентные* базисы, а базисы, получаемые посредством „сдвига“ (3), не всегда эквивалентны. Ниже увидим, что с помощью „сдвига“ (3) возможен также случай перехода от биортогональной системы, не являющейся базисом, к базису.

§ 2. Пусть H — сепарабельное пространство Гильберта. Следуя Н. К. Бари (3), будем говорить, что последовательность $\{f_i\}$, образующая вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему в H, является системой Бесселя, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |(x, g_i)|^2 < \infty$ при любом $x \in H$. Далее, последовательность $\{f_i\}$ является системой Гильберта, если для любой последовательности чисел $\{a_i\}$, для которой $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$, существует элемент $x \in H$, удовлетворяющий условию $(x, g_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Система Бесселя, являющаяся в то же время системой Гильберта, называется системой (базисом) Рисса. Базисом Бесселя будем называть базис в H, являющийся системой Бесселя. К. И. Бабенко(4) построил пример базиса Бесселя, который не является базисом Рисса. В качестве приложения теоремы 3 дадим следующий критерий базиса Бесселя.

Теорема 4. *Для того чтобы последовательность $\{f_i\}$, образующая вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему, была базисом Бесселя, необходимо и достаточно существование константы M, удовлетворяющей условию*:

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (x, g_i)(\varphi_i - f_i) \right\| \leqslant M \| x \|, \tag{4}$$

где $\{\varphi_i\}$ произвольный, но наперед заданный базис Рисса.

Как известно, базисы Рисса эквивалентны, т. е. всегда существует линейное взаимно-однозначное отображение пространства на себя, переводящее два базиса Рисса друг в друга. Но легко убедиться, что существуют неэквивалентные базисы Бесселя, которые не являются базисами Рисса. Для этого достаточно обратиться к вышеуказанному примеру базиса К. И. Бабенко. Пусть $\xi = \{|x|^{-\alpha} e^{-inx}\}$, $\eta = \{|x|^{-\beta} e^{-inx}\}$ — базисы Бесселя, причем $0 < \alpha < 1/2$, $0 < \beta < 1/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Легко проверить, что если $\alpha < \beta$, то $\mathfrak{A}_\alpha < \mathfrak{A}_\beta$, где $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{A}_\eta$, причем $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{A}_\beta$ не совпадают. Отсюда следует, что ξ, η — неэквивалентные базисы.

Пусть $\{f_i\}$ — система Бесселя, образующая вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему. Легко проверить справедливость следующего предложения:

Для того чтобы система Бесселя $\{f_i\}$ была базисом, необходимо и достаточно существование константы M, удовлетворяющей следующему условию:

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (x, g_i)(f_i - g_i) \right\| \leqslant M \| x \| . \tag{5}$$

* Термин «эквивалентные базисы» принадлежит И. М. Гельфанду.

Выполнение условия (5) влечет за собой выполнение следующего условия:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i (f_i - g_i) \right\| \leqslant M \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right\| \tag{6}$$

при любом $n = 1, 2, \ldots$ и для произвольных чисел c_i.

Отметим, что условия (5) и (6) не эквивалентны, что следует из замечания Н. К. Бари ([3]) о существовании систем Гильберта, не являющихся базисами.

Очевидно, что условию (6) удовлетворяют только базисы Бесселя.

Предыдущее предложение можно несколько обобщить следующим образом.

Для того чтобы система Бесселя $\{f_i\}$, образующая вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему, была базисом, необходимо и достаточно существование константы M, удовлетворяющей следующему условию:

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (x, g_i)(f_i - h_i) \right\| \leqslant M \| x \|,$$

где h_i — произвольная, но наперед заданная система Гильберта.

Из этого предложения и из вышеуказанного замечания Н. К. Бари следует отрицательный ответ на следующий вопрос.

Пусть $\{f_i\}$ — базис в H образующий вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему. Далее, пусть $\{\varphi_i\}$ — полная минимальная последовательность в H, удовлетворяющая следующему условию:

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (x, g_i)(f_i - \varphi_i) \right\| \leqslant M \| x \|$$

при любом $x \in H$, где M — некоторая константа. Будет ли последовательность $\{\varphi_i\}$ базисом? Если константа $M < 1$, то, как известно, $\{\varphi_i\}$ — базис, но в общем случае последовательность $\{\varphi_i\}$ базисом не будет.

Поступило
23 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Гринблюм, ДАН, **21**, № 9 (1938). [2] М. Крейн, Д. Мильман и М. Рутман, Зап. Н.-и. ин-та матем. и мех. и Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, 26 (1940). [3] Н. К. Бари, ДАН, **54**, № 5 (1946). [4] К. И. Бабенко, ДАН, **62**, № 2 (1948).