Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 1

МАТЕМАТИКА

С. Н. ЧЕРНИКОВ

К ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 3 I 1949)

Введение. В работе автора „К теории специальных p-групп" (1) установлено, что каждая бесконечная локально конечная p-группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, специальна, т. е. является расширением прямого произведения конечного множества квази-циклических групп (групп типа p^{∞}) при помощи конечной p-группы. Так как локально конечные p-группы составляют часть класса локально разрешимых групп, то естественно попытаться распространить это предложение на локально разрешимые группы, удовлетворяющие условию минимальности для абелевых подгрупп.

В настоящей работе установлено (см. теорему 3), что каждая бесконечная локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является расширением прямого произведения конечного множества квази-циклических групп при помощи конечной разрешимой группы.

1. Лемма 1. *Если $\mathfrak{G}$ — счетная локально разрешимая группа, π — множество простых делителей порядков ее элементов и π' — подмножество этого множества, то группа $\mathfrak{G}$ является произведением некоторой своей силовской π'-подгруппы на некоторую свою силовскую $(\pi - \pi')$-подгруппу.*

Это предложение легко получить, опираясь на теорему Hall'a о конечных разрешимых группах (2).

Следствие. *Если локально разрешимая группа $\mathfrak{G}$ обладает конечной силовской подгруппой по какому-нибудь простому числу p, то ни одна фактор группа группы $\mathfrak{G}$ не может обладать бесконечной силовской p-подгруппой по тому же числу p.*

Лемма 2. *Если группа $\mathfrak{G}$ локально разрешима и удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то фактор-группа группы $\mathfrak{G}$ по произвольному ее нормальному делителю $\mathfrak{N}$, имеющему конечное множество простых делителей своих порядков, удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп.*

Это предложение можно доказать, опираясь на лемму 1 и теорему 4 из (1).

Лемма 3. *Если группа $\mathfrak{G}$ является расширением конечной элементарной абелевой p-группы $\mathfrak{A}$ при помощи конечной нециклической элементарной абелевой q-группы, то при $q \neq p$ в группе $\mathfrak{G}$ существует по крайней мере один элемент порядка pq.*

Это предложение является следствием теоремы из § 248 книги (3).

2. Теорема 1. *Всякая локально разрешимая группа $\mathfrak{G}$, не имеющая бесконечных силовских подгрупп и удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, конечна.*

Доказательство. Так как каждая бесконечная группа имеет счетные подгруппы, то достаточно доказать, что группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условиям теоремы, не может быть счетной. Пусть $\mathfrak{G}$ — счетная группа. Тогда, ввиду локальной конечности группы $\mathfrak{G}$, ее можно представить в виде суммы возрастающей цепочки конечных групп:

$$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n \subset \ldots$$

Каждая из групп $\mathfrak{G}_i$, ввиду своей разрешимости, обладает по некоторому простому числу p_i по крайней мере одной инвариантной элементарной абелевой p_i-подгруппой. Пусть $\mathfrak{A}_i$ — какая-нибудь из таких подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Если последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ содержит лишь конечное множество различных членов, то группа $\mathfrak{G}$ обладает инвариантной абелевой подгруппой $\mathfrak{K}_1$ конечного порядка.

Ввиду следствия 1 леммы 1 фактор-группа $\mathfrak{G} / \mathfrak{K}_1$ не имеет бесконечных силовских подгрупп. Ввиду леммы 2 группа $\mathfrak{G} / \mathfrak{K}_1$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Так как группа $\mathfrak{G} / \mathfrak{K}_1$ счетна и локально разрешима, то для нее можно повторить все предыдущие рассуждения. Если при этом окажется, что группа $\mathfrak{G} / \mathfrak{K}_1$ обладает конечным абелевым нормальным делителем $\mathfrak{K}_2 / \mathfrak{K}_1$, то для группы $\mathfrak{G} / \mathfrak{K}_2$ придется также повторить предыдущие рассуждения. Продолжая неограниченно эти рассуждения, мы либо получим бесконечную возрастающую цепочку инвариантных в $\mathfrak{G}$ конечных групп

$$\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{K}_n \subset \ldots,$$

либо придем к фактор-группе $\mathfrak{G} / \mathfrak{K}_k$, для которой рассмотренный выше процесс выделения групп $\mathfrak{A}_{p_i}$ будет связан с последовательностью простых чисел p_i, содержащей бесконечное множество различных членов.

В первом случае группа $\mathfrak{K}$, являющаяся суммой групп $\mathfrak{K}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, ввиду теорем 3 и 12 из [4], должна обладать абелевой подгруппой, не удовлетворяющей условию минимальности для своих подгрупп, что противоречит нашему предположению о группе $\mathfrak{G}$. Следовательно, первый случай невозможен.

При исследовании второго случая с целью упрощения обозначений будем считать, что последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ уже для самой группы $\mathfrak{G}$ содержит бесконечное множество различных членов. Более того, будем считать, что она не содержит вовсе совпадающих членов. Это предположение не нарушает общности, так как в противном случае в цепочке $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n \subset \ldots$ можно было бы опустить те члены, которым соответствуют повторяющиеся простые числа p_i.

Легко убедиться, что последовательность групп

$$\mathfrak{A}_{p_1}, \mathfrak{A}_{p_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{p_n}, \ldots$$

не может содержать бесконечной подпоследовательности циклических групп.

В самом деле, пусть

$$\mathfrak{A}_{p_{n_1}}, \mathfrak{A}_{p_{n_2}}, \ldots, \mathfrak{A}_{p_{n_i}}, \ldots$$

такая подпоследовательность. Если $\mathfrak{B}_i$ — группа, порожденная элементами групп

$$\mathfrak{A}_{p_{n_i}}, \mathfrak{A}_{p_{n_{i+1}}}, \ldots,$$

то цепочка

$$\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_n \ldots$$

может быть уплотнена до главного периодического множества группы $\mathfrak{B}_1$ ([5]). Но тогда, опираясь на теорему 6 из ([5]), следствие леммы 1 и лемму 2, можно показать, что группа $\mathfrak{B}_1$ конечна, что противоречит ее определению. Следовательно, и второй случай невозможен и, значит, среди групп $\mathfrak{A}_{p_1}, \mathfrak{A}_{p_2}, \ldots \mathfrak{A}_{p_i}, \ldots$ не существует бесконечной последовательности циклических групп. Более того, выбирая подходящим образом последовательность $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n \subset \ldots$, можно добиться того, что в последовательности $\mathfrak{A}_{p_1}, \mathfrak{A}_{p_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{p_n}, \ldots$ не будет ни одной циклической подгруппы. Итак, пусть последовательность $\mathfrak{A}_{p_1}, \mathfrak{A}_{p_2}, \ldots \mathfrak{A}_{p_n}, \ldots$ удовлетворяет этому условию.

Далее, опираясь на лемму 3, можно показать, что в группе $\mathfrak{A}_{p_1}$ существует элемент A_{p_1}, нормализатор $\mathfrak{N}_1$ которого в группе $\mathfrak{B}_2$, порожденной элементами всех групп $\mathfrak{A}_{p_i}$, $i = 2, 3, \ldots$, бесконечен. Так как группа $\mathfrak{N}_1$ удовлетворяет всем тем условиям, которым удовлетворяет группа $\mathfrak{G}$, то в ней можно выделить элемент N_1, нормализатор которого в группе $\mathfrak{N}_1$ бесконечен и имеет бесконечную подгруппу $\mathfrak{N}_2$, не содержащую элемента N_1. Затем в группе $\mathfrak{N}_2$ можно выделить элемент N_2, нормализатор которого в группе $\mathfrak{N}_2$ имеет бесконечную подгруппу $\mathfrak{N}_3$, не содержащую элемента N_2, и т. д. Элементы

$$A_{p_1}, N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots,$$

очевидно, перестановочны друг с другом и друг от друга отличны. Бесконечная абелева группа, порожденная этими элементами, не может удовлетворять условию минимальности, так как все ее силовские подгруппы конечны. Но это противоречит предположению о группе $\mathfrak{G}$. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ не может быть бесконечной (счетной). Теорема доказана.

Теорема 2. *Полная локально разрешимая группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, абелева.*

Доказательство. Рассмотрим сперва случай, когда группа $\mathfrak{G}$ счетная. Ввиду теоремы 1 из ([5]) группа $\mathfrak{G}$ обладает разрешимым множеством, т. е. таким содержащим группу $\mathfrak{G}$ и ее единичную подгруппу упорядоченным по включению множеством нормальных делителей, все факторы которого абелевы. Пусть $\mathfrak{B} / \mathfrak{A}$ — какой-нибудь из факторов этого множества. Легко убедиться, что каждая силовская подгруппа группы $\mathfrak{B} / \mathfrak{A}$ содержится в центре группы $\mathfrak{G} / \mathfrak{A}$. В самом деле, опираясь на лемму 1, можно показать, что силовская p-подгруппа $\mathfrak{B}_p / \mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{B} / \mathfrak{A}$ совпадает с группой $\mathfrak{B}^{(p)} \mathfrak{A} / \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{B}^{(p)}$ — некоторая силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{B}$.

Отсюда, ввиду соотношения

$$\mathfrak{B}^{(p)} \mathfrak{A} / \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^{(p)} / \mathfrak{B}^{(p)} \cap \mathfrak{A}$$

и теоремы 4 из ([1]), устанавливающей специальность группы $\mathfrak{B}^{(p)}$, вытекает, что группа $\mathfrak{B}_p / \mathfrak{A}$ удовлетворяет условию минимальности для своих подгрупп. Но тогда эта группа, будучи коммутативной, должна быть прямым произведением конечного множества циклических и квази-циклических групп. Отсюда, ввиду полноты группы $\mathfrak{G} / \mathfrak{A}$, немедленно вытекает, что группа $\mathfrak{B}_p / \mathfrak{A}$ содержится в центре группы $\mathfrak{G} / \mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{B}_p / \mathfrak{A}$ — произвольная силовская подгруппа $\mathfrak{B} / \mathfrak{A}$, то это означает, что вся группа $\mathfrak{B} / \mathfrak{A}$ содержится в центре группы $\mathfrak{G} / \mathfrak{A}$. Но тогда рассматриваемое разрешимое множество группы $\mathfrak{G}$ является ее центральным множеством. Опираясь на теоремы 5, 14, 4, 2 соответственно из работ ([5], [6], [1]) и ([7]), отсюда легко вывести, что $\mathfrak{G}$ — коммутативная группа.

Откажемся теперь от предположения о счетности группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{G}_s$ подгруппу группы $\mathfrak{G}$, порожденную максимальными полными подгруппами всех силовских подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Если хотя бы одна из силовских подгрупп группы $\mathfrak{G}$ бесконечна, то, ввиду теоремы 4 из ([1]), группа $\mathfrak{G}_s$ будет отличной от единицы. Группа $\mathfrak{G}_s$ является, очевидно, полной. Опираясь на рассмотренный частный случай теоремы, легко показать, что эта группа абелева.

Так как группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то группа $\mathfrak{G}_s$ является прямым произведением конечного множества квази-циклических групп. Отсюда, ввиду леммы 2, вытекает, что фактор-группа $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_s$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Опираясь на теорему 4 из ([1]) и доказанный частный случай настоящей теоремы, легко установить, что все силовские подгруппы группы $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_s$ конечны. Но тогда, ввиду теоремы 1, эта группа не может быть бесконечной.

Так как $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_s$, будучи фактор-группой полной группы, не может быть отличной от единицы конечной группой, то $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_s$. Вместе с этим наше предложение о группе $\mathfrak{G}$ доказано. Из теорем 1 и 2 легко выводится

Теорема 3. *Всякая бесконечная локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является расширением прямого произведения конечного множества квази-циклических групп при помощи конечной разрешимой группы.*

Так как группа $\mathfrak{G}$, имеющая описанное здесь строение, удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то нами доказана также

Теорема 4. *Локально разрешимая группа тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, когда она удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп.*

Поступило
23 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, ДАН, **63**, № 1 (1948). [2] P. Hall, J. London Math. Soc., **3**, 98 (1928). [3] W. Burnside. The Theory of Groups of Finite Order, 2 nd ed., 1911. [4] С. Н. Черников, Матем. сб., **22** (64), 101 (1948). [5] С. Н. Черников, Матем. сб., **13** (55), 317 (1943). [6] С. Н. Черников, Матем. сб., 7 (49), 35 (1940). [7] С. Н. Черников, Матем. сб., 7 (49), 539 (1940).