Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 1

МАТЕМАТИКА

С. Б. СТЕЧКИН

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 I 1949)

1. На протяжении всей работы

$$x_m \geqslant 0, \quad x_m \neq 0, \quad y_n \geqslant 0, \quad y_n \neq 0,$$
$$p > 1, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad q > 1, \quad q' = \frac{q}{q-1}.$$

Хорошо известно следующее „неравенство Гильберта“ (см., например, ([1]), гл. IX; там же даны дальнейшие библиографические указания):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_m y_n}{m+n} < \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^{p'} \right)^{1/p'}. \tag{1}$$

Харди, Литтльвуд и Полиа (([1]), § 9.14) получили обобщение этой теоремы, доказав такое „двупараметрическое неравенство Гильберта“: *Пусть*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1, \quad \lambda = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}.$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_m y_n}{(m+n)^{\lambda}} \leqslant K(p, q) \left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^q \right)^{1/q}. \tag{2}$$

Метод Харди, Литтльвуда и Полиа дает для $K(p, q)$ выражение

$$K(p, q) = (p')^p + (q')^q.$$

Этот результат был усилен В. И. Левиным ([2]), который показал, что можно положить

$$K(p, q) = \left(\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{\lambda p'} \right)^{\lambda} = \left(\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{\lambda q'} \right)^{\lambda}. \tag{3}$$

Впрочем, нет никаких оснований предполагать, что и это значение константы является наилучшим.

В настоящей заметке будет установлено, что неравенство (2) (с константой (3)) в ы т е к а е т из неравенства (1) и что это обстоятельство имеет весьма общую природу. Точнее, здесь будет доказана следующая

Теорема. *Пусть* $a_{mn} \geqslant 0$ *и для любого* $p > 1$ *и любых* x_m, y_n *имеет место неравенство*

$$\sum a_{mn} x_m y_n \leqslant K(p) \left(\sum_m x_m{}^p\right)^{1/p} \left(\sum_n y_n{}^{p'}\right)^{1/p'}. \tag{4}$$

Далее, пусть

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1, \quad \lambda = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \ (< 1).$$

Тогда

$$\sum a_{mn}^{\lambda} x_m y_n \leqslant K^{\lambda}(\lambda q') \left(\sum_m x_m{}^p\right)^{1/p} \left(\sum_n y_n{}^q\right)^{1/q}. \tag{5}$$

2. Нам понадобится одна простая лемма о выпуклости.

Лемма. *Пусть*

$$a_{mn} \geqslant 0, \quad b_{mn} \geqslant 0, \quad 0 < \alpha_1 \leqslant 1, \quad 0 < \beta_1 \leqslant 1, \quad 0 < \alpha_2 \leqslant 1, \quad 0 < \beta_2 \leqslant 1$$

и для любых x_m, y_n *имеют место неравенства*

$$\sum a_{mn} x_m y_n \leqslant K_1 \left(\sum_m x_m^{1/\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\sum_n y_n^{1/\beta_1}\right)^{\beta_1}, \tag{6}$$

$$\sum b_{mn} x_m y_n \leqslant K_2 \left(\sum_m x_m^{1/\alpha_2}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_n y_n^{1/\beta_2}\right)^{\beta_2}. \tag{7}$$

Пусть, далее,

$$< k_1 < 1, \quad 0 < k_2 < 1, \quad k_1 + k_2 = 1, \quad \alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \quad \beta = k_1\beta_1 + k_2\beta_2.$$

Тогда

$$\sum a_{mn}^{k_1} b_{mn}^{k_2} x_m y_n \leqslant K_1^{k_1} K_2^{k_2} \left(\sum_m x_m^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \left(\sum_n y_n^{1/\beta}\right)^{\beta}. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем по неравенству Гельдера

$$\sum a_{mn}^{k_1} b_{mn}^{k_2} x_m y_n = \sum (a_{mn} x_m^{\alpha_1/\alpha} y_n^{\beta_1/\beta})^{k_1} (b_{mn} x_m^{\alpha_2/\alpha} y_n^{\beta_2/\beta})^{k_2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum a_{mn} x_m^{\alpha_1/\alpha} y_n^{\beta_1/\beta}\right)^{k_1} \left(\sum b_{mn} x_m^{\alpha_2/\alpha} y_n^{\beta_2/\beta}\right)^{k_2}. \tag{9}$$

Но, в силу (6) и (7),

$$\sum a_{mn} x_m^{\alpha_1/\alpha} y_n^{\beta_1/\beta} \leqslant K_1 \left(\sum_m x_m^{1/\alpha}\right)^{\alpha_1} \left(\sum_n y_n^{1/\beta}\right)^{\beta_1},$$

$$\sum b_{mn} x_m^{\alpha_2/\alpha} v_n^{\beta_2/\beta} \leqslant K_2 \left(\sum_m x_m^{1/\alpha}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_n y_n^{1/\beta}\right)^{\beta_2}.$$

Подставляя эти оценки в неравенство (9), получаем, что

$$\sum a_{mn}^{k_1} b_{mn}^{k_2} x_m y_n \leqslant$$
$$\leqslant \left\{K_1 \left(\sum_m x_m^{1/\alpha}\right)^{\alpha_1} \left(\sum_n y_n^{1/\beta}\right)^{\beta_1}\right\}^{k_1} \left\{K_2 \left(\sum_m x_m^{1/\alpha}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_n y_n^{1/\beta}\right)^{\beta_2}\right\}^{k_2} =$$
$$= K_1^{k_1} K_2^{k_2} \left(\sum_m x_m^{1/\alpha}\right)^{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2} \left(\sum_n y_n^{1/\beta}\right)^{k_1\beta_1 + k_2\beta_2} = K_1^{k_1} K_2^{k_2} \left(\sum_m x_m^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \left(\sum_n y_n^{1/\beta}\right)^{\beta},$$

и лемма доказана.

Из доказательства видно, что если хотя бы в одном из неравенств (6) или (7) знак равенства недостижим, то он недостижим и в неравенстве (8).

Заметим, что в частном случае $a_{mn} \equiv b_{mn}$ эта лемма была доказана М. Риссом ([3]) (см. также ([1]), теорема 285).

3. Для вывода теоремы положим в доказанной лемме

$$b_{mn} = 1, \alpha_1 = \frac{1}{p_1}, \quad \beta_1 = \frac{1}{p_1'}, \quad \alpha_2 = \beta_2 = 1, \quad k_1 = \lambda < 1, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}.$$

Тогда получим такое предложение:

Пусть $p_1 > 1$ *и для любых* x_m, y_n

$$\sum a_{mn} x_m y_n \leqslant K(p_1) \left(\sum_m x_m^{p_1}\right)^{1/p_1} \left(\sum_n y_n^{p_1'}\right)^{1/p_1'}. \tag{10}$$

Далее, пусть

$$0 < \lambda < 1, \quad p' = \frac{p_1'}{\lambda}, \quad q' = \frac{p_1}{\lambda}.$$

Тогда

$$\sum a_{mn}^{\lambda} x_m y_n \leqslant K^{\lambda}(p_1) \left(\sum_m x_m^p\right)^{1/p} \left(\sum_n y_n^q\right)^{1/q}.$$

Теперь остается только заметить, что если неравенство (10) имеет место для любого $p_1 > 1$, то, какие бы ни были даны числа $p > 1$ и $q > 1$, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1,$$

положив

$$\lambda = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}, \quad p_1 = \lambda q',$$

мы получим условия применимости предыдущего предложения, из которого, таким образом, и вытекает теорема.

4. Сделаем несколько замечаний.

A. Если в (4) имеет место строгое неравенство, то и в (5) имеет место строгое неравенство. Это вытекает из аналогичного замечания к лемме.

B. Положив в теореме

$$a_{mn} = \frac{1}{m+n}$$

и выбрав пределы суммирования от 1 до ∞, получим неравенство (2) (с константой, указанной В. И. Левиным), как следствие из неравенства Гильберта (1). Можно было бы привести много других частных примеров.

C. Все результаты настоящей работы без труда переносятся на положительные полилинейные формы и имеют интегральные аналоги.

D. Отметим в заключение, что лемма, доказанная в n° 2, имеет интересный аналог:

Пусть

$$a_{mn}(t) \geqslant 0, \quad \alpha(t) > 0, \quad \beta(t) > 0, \quad k(t) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$
$$\int_0^1 k(t)\, dt = 1, \quad \alpha = \int_0^1 k(t)\, \alpha(t)\, dt, \quad \beta = \int_0^1 k(t)\, \beta(t)\, dt.$$

2*

Далее, пусть для всех t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и всех $x_m, y_n \geqslant 0$

$$\sum a_{mn}(t)\, x_m y_n \leqslant K(t) \left\{ \sum_m x_m^{1/\alpha(t)} \right\}^{\alpha(t)} \left\{ \sum_n y_n^{1/\beta(t)} \right\}^{\beta(t)}.$$

Тогда

$$\sum \mathfrak{G}(a_{mn})\, x_m y_n \leqslant \mathfrak{G}(K) \left(\sum_m x_m^{1/\alpha} \right)^{\alpha} \left(\sum_n y_n^{1/\beta} \right)^{\beta},$$

где

$$\mathfrak{G}(f) = \exp \left\{ \int_0^1 k(t) \ln f(t)\, dt \right\}.$$

Если

$$\int_0^1 k(t) \ln^+ f(t)\, dt = \infty,$$

то, по определению, $\mathfrak{G}(f) = +\infty$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
2 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Харди, Д. Литтльвуд и Г. Полиа, Неравенства, М., 1948. [2] V. Levin, J. Indian Math. Soc., new ser., II, n° 3 (1936). [3] M. Riesz, Acta Math. 49 (1927).