Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик И. Г. ПЕТРОВСКИЙ и О. А. ОЛЕЙНИК

О ТОПОЛОГИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ всюду в дальнейшем означает многочлен степени n относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с действительными коэффициентами. Будем предполагать, что система уравнений

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_m = 0, \quad F = 0, \tag{1}$$

где F_k означает производную от F по x_k, не имеет действительных конечных или бесконечных решений. Тогда множество Γ точек $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$ действительного m-мерного проективного пространства P_m, где

$$x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) = 0,$$

представляет собою замкнутое многообразие $(m-1)$-го измерения — действительную алгебраическую поверхность без действительных особых точек.

Обозначим через $E(\Gamma)$ эйлерову характеристику этого многообразия, т. е. $\sum(-1)^r p^r$, где p^r — его r-мерное число Бетти по модулю 2. Тогда при нечетном m имеет место соотношение:

$$|E(\Gamma)| \leqslant (n-1)^m - 2S(m, n) + 1. \tag{2}$$

Число $S(m, n)$ есть число тех членов полинома

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{n-1} - 1}{x_i - 1},$$

степень которых не превосходит $\left[\frac{mn - 2m - n}{2}\right]$ ($[N]$ означает целую часть N). Легко видеть, что

$$S(2, n) = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)}{2}, \qquad S(3, n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

При четном m, как известно, $E(\Gamma)$ всегда равно 0.

Обозначим через M замыкание в проективном пространстве P_m множества конечных точек P_m, для которых

$$x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad x_{m+1} = 1$$

гиперплоскость $x_{m+1}=0$ мы считаем бесконечно удаленной плоскостью). Тогда при четном n и любом m справедливо соотношение:

$$|E(M)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Если n нечетное, то

$$|E(M)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + 1 \tag{4}$$

при нечетном m и

$$|E(M)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} - S(m-1, n) + 1 \tag{5}$$

при четном m.

Если поверхность $x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) = 0$ имеет конечное число действительных изолированных особых точек, то, как легко видеть, $E(M)$ совпадает с эйлеровой характеристикой множества M, построенного для многочлена $F(x_1, \ldots, x_m) + \varepsilon$, где ε — малое положительное число. Поэтому и в этом случае для $E(M)$ справедливы оценки (3), (4), (5).

При $m=2$ оценки (3) и (5) были получены И. Г. Петровским раньше ([1]). В этом случае И. Г. Петровский построил многочлены F, для которых соотношения (3) и (5) выполняются со знаком равенства. При $m=3$ и $n=4$ также можно построить многочлен F, для которого соотношения (2) и (3) выполняются со знаком раненства. Для этого многочлена поверхность Γ состоит из 10 овалов ([2]).

Поступило
12 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Ann. of Math., 39, № 1, 189 (1938). [2] D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, 2, 449—453, 1933.