Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

МНОГОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ МНОГОНОРМИРОВАННОГО БИКОМПАКТА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУГРУППЫ НЕРАСШИРЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В НЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 V 1949)

I. Многометрические пространства и нерасширяющие операторы в них

Многометрическим пространством мы назовем множество $\mathfrak{M}$ со многими „псевдо-метриками“, в котором разные элементы находятся на положительном „расстоянии“ хотя бы в одной псевдометрике.

Если R есть множество символов псевдо-метрик, $x \in R$ и $\rho_x(f, \varphi)$ обозначает расстояние между элементами $f, \varphi \in \mathfrak{M}$ в псевдо-метрике, отвечающей символу x (x-метрика), то выполняется: а) $\rho_x(f, \varphi) = \rho_x(\varphi, f) \geqslant 0$; б) для всякого $\psi \in \mathfrak{M}$ $\rho_x(f, \varphi) \leqslant \rho_x(f, \psi) + \rho_x(\psi, \varphi)$.

Заданием в $\mathfrak{M}$ окрестностей вида $\rho_{x_j}(f, f_0) < \varepsilon$, $\{x_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n} \subset R$, мы определяем в $\mathfrak{M}$ топологию — „многометрическую топологию“. Если $\mathfrak{M}$ в этой топологии бикомпактно, то $\mathfrak{M}$ является бикомпактом, который мы назовем многометрическим.

Всякий бикомпакт Q может рассматриваться тривиальным образом как многометрический: каждой непрерывной функции $x(q)$, определенной на Q, следует отнести „расстояние“ $\rho_x(q_1, q_2) = |x(q_1) - x(q_2)|$. Другой, существенный, пример многометрического пространства получится, если положить $\rho_x(q_1, q_2) = \sup\limits_{s \in \mathfrak{G}} |x(sq_1) - x(sq_2)|$, где $\mathfrak{G}$ есть совокупность однозначных отображений Q в себя, содержащая тождественное преобразование Q; разумеется, новая топология может здесь не совпасть со старой.

Однозначное отображение U многометрического пространства $\mathfrak{M}$ в себя назовем **нерасширяющим оператором**, если для каждого $x \in R$ выполняется $\rho_x(Uf, U\varphi) \leqslant \rho_x(f, \varphi)$ при любых $f, \varphi \in \mathfrak{M}$. Если всегда имеет место знак равенства, то оператор назовем **изометрическим**; если всегда имеет место знак неравенства, то оператор назовем **сжимающим**.

Ниже $\mathfrak{M}$ будет многометрическим бикомпактом и R — множеством символов его псевдо-метрик.

Понятия равномерной и равностепенной непрерывности в многометрическом бикомпакте допускают естественное обобщение. При этом непосредственно проверяется обобщение теоремы Арцела и доказывается естественное обобщение теоремы Г. Кантора.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{S}$ обозначает полугруппу с единицей однозначных отображений $\mathfrak{M}$ в себя и* $s\mathfrak{M}=\{sf\}_{f\in\mathfrak{M}}$ *при* $s\in\mathfrak{S}$.

Тогда выполняется следующее:

а) *Если для любых* $s_1, s_2 \in \mathfrak{S}$ *можно указать* $s_3 \in \mathfrak{S}$ *так, чтобы* $s_1\mathfrak{M}$ *и* $s_2\mathfrak{M}$ *содержали в себе* $s_3\mathfrak{M}$, *и все операторы* $s\in\mathfrak{S}$ *являются непрерывными в* $\mathfrak{M}$, *то множество* $\mathfrak{M}_0$, *являющееся пересечением* $\underset{s\in\mathfrak{S}}{D}s\mathfrak{M}$ *всех бикомпактов* $s\mathfrak{M}$, $s\in\mathfrak{S}$, *отображается всеми операторами* $s\in\mathfrak{S}$ *так, что* $s\mathfrak{M}_0\supseteq\mathfrak{M}_0$.

б) *Если все операторы* $s\in\mathfrak{S}$ *являются нерасширяющими и система* $\{s\mathfrak{M}\}_{s\in\mathfrak{S}}$ *центрирована, то бикомпакт* $\mathfrak{M}_0=\underset{s\in\mathfrak{S}}{D}s\mathfrak{M}$ *отображается на себя изометрически всеми операторами* $s\in\mathfrak{S}$. *Всякое инвариантное относительно* $\mathfrak{S}$ *подмножество* $J\subseteq\mathfrak{M}_0$ *отображается на себя всеми операторами* $s\in\mathfrak{S}$ *и распадается на совокупность минимальных замкнутых инвариантных подмножеств*.*

II. Многонормированные пространства; экстремальные точки выпуклых бикомпактов

Пусть заданы векториальное (линейное) множество E и абстрактное множество R так, что каждому $x\in R$ относится неотрицательная функция на E, $\|f\|_x$ („x-норма"). E называется многонормированным пространством, если: а) $\|\lambda f\|_x=|\lambda|\,\|f\|_x\geqslant 0$, $f\in E, x\in R$, λ есть вещественное число; б) $\|f+\varphi\|_x\leqslant\|f\|_x+\|\varphi\|_x$, $f\in E$, $\varphi\in E$, $x\in R$; в) если $f\neq\theta$, то $\|f\|_x>0$ хотя бы при одном $x\in R$. Пространство E мы рассматриваем в естественным образом порождаемой многометрической топологии; бикомпакт в E назовем многонормированным.

Аддитивный однородный и непрерывный функционал в E назовем, как обычно, линейным; совокупность всех линейных функционалов в E обозначим L.

Лемма. *Если* $f_1\in E$, $f_2\in E$ *и* $\Phi(f_1)=\Phi(f_2)$ *при всех* $\Phi\in L$, *то* $f_1=f_2$.

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Всякий многонормированный бикомпакт топологически эквивалентен некоторому функционально-определенному бикомпакту** (с определяющими функциями из* L*).*

Отсюда вытекает, что теоремы о T-границе функционально-определенных бикомпактов ([2,3]) переносятся на многонормированные бикомпакты. В частности, выпуклая замкнутая оболочка K_A множества A всех экстремальных точек выпуклого многонормированного бикомпакта K совпадает с ним.

Мы получим пример многонормированного пространства, если положим $\|f\|_x=\sup\limits_{U\in\mathfrak{S}}|f(Ux)|$, где x пробегает пространство Банаха B, f пробегает сопряженное пространство B^* и $\mathfrak{S}$ есть совокупность линейных операторов в B, содержащая единичный оператор: каждому $x\in B$ отвечает норма $\|f\|_x$ и относительно этой совокупности норм B^* превращается в многонормированное пространство $\tilde{B}$. Если $\mathfrak{S}$ есть полугруппа, то каждый оператор $U\in\mathfrak{S}$ является нерасширяющим в $\tilde{B}$.

---

* Здесь и в дальнейшем инвариантность понимается относительно всех операторов $\mathfrak{S}$ сразу. Из первой части теоремы 1б) при сжимающих операторах $s\in\mathfrak{S}$ получается обобщение теоремы Качиополи — Банаха.

** Функционально-определенные бикомпакты рассматривались нами в заметках ([2,3]).

III. Неподвижные точки и инвариантные части выпуклого бикомпакта многонормированного пространства относительно полугруппы нерасширяющих линейных операторов

Сохраняя обозначения E, K и A, мы рассмотрим еще полугруппу $\mathfrak{G}$ операторов линейных нерасширяющих в E и отображающих K на себя; через $K(\mathfrak{G})$ обозначим совокупность всех неподвижных точек $\mathfrak{G}$ в K*.

Заметим, что множество A экстремальных точек K отображается на себя всеми операторами $U \in \mathfrak{G}$ (4). Ниже мы будем выяснять связь между множеством $K(\mathfrak{G})$ и инвариантными подмножествами A.

Инвариантное подмножество $A_1 \subseteq A$ назовем *p*-эргодическим (относительно $\mathfrak{G}$ в K), если оно замкнуто в A и его выпуклая замкнутая оболочка содержит лишь одну неподвижную точку полугруппы $\mathfrak{G}$ (точку из $K(\mathfrak{G})$).

p-эргодическое множество назовем минимальной p-эргодической частью K, если оно не содержит правильных частей, являющихся p-эргодическими множествами. Очевидно, что если два минимальных p-эргодических множества имеют общую точку, то они совпадают.

Если множество A_1 является минимальной p-эргодической частью K, которой отвечает экстремальная неподвижная точка (т. е. неподвижная точка в $K(\mathfrak{G})$ является экстремальной точкой в $K(\mathfrak{G})$), то мы назовем множество A_1 эргодическим: эргодической частью K относительно $\mathfrak{G}$.

Легко убедиться в верности следующего предложения:

Если $f \in K$, то замыкание множества $\{Uf\}_{U \in \mathfrak{G}}$ является минимальным замкнутым инвариантным подмножеством в K.

Множество A экстремальных точек K распадается на минимальные замкнутые в A инвариантные подмножества.

Неподвижную точку, отвечающую эргодическому множеству, назовем эргодической. Заранее нельзя утверждать существование эргодических неподвижных точек. Заранее нельзя также утверждать, что минимальное замкнутое в A инвариантное подмножество A является p-эргодическим.

Теорема 3 (основная). *Пусть $\mathfrak{G}$ является полугруппой линейных нерасширяющих операторов в многонормированном пространстве E, отображающих на себя выпуклый бикомпакт K, и A обозначает множество экстремальных точек K.*

Тогда выполняется следующее:

а) *Все общие неподвижные точки операторов полугруппы $\mathfrak{G}$, лежащие в K, содержатся в выпуклой замкнутой оболочке теоретико-множественной суммы всех эргодических частей K**. Более того, множество эргодических неподвижных точек плотно в множестве экстремальных точек $K(\mathfrak{G})$.*

б) *Всякое минимальное замкнутое в A инвариантное подмножество A является p-эргодическим; следовательно, A распадается на минимальные p-эргодические множества.*

IV. Заключительное замечание

Пусть множество $\mathfrak{M}$ теоремы 1б) является многонормированным бикомпактом и множество $\mathfrak{G}$ этой теоремы состоит из линейных нерасширяющих операций в многонормированном пространстве E, со-

---

* Подразумевается общая неподвижная точка всех операторов $U \in \mathfrak{G}$.

** Существуют простейшие примеры, в которых выпуклая (замкнутая) оболочка эргодических множеств K является правильной частью K.

держащем $\mathfrak{M}$. На основании 1б) выделяется множество $\mathfrak{M}_0$, которое всеми операторами $U \in \mathfrak{G}$ изометрически отображается на себя. Пусть K есть выпуклая замкнутая оболочка $\mathfrak{M}_0$ и A — множество экстремальных точек K. Используя теорему 2, можно показать, что операторы $U \in \mathfrak{G}$ отображают K на себя изометрически и $A \subseteq \mathfrak{M}_0 \subseteq K$. Из теоремы 3 вытекает, что в A (а значит, и в $\mathfrak{M}$) выделяется „достаточно много“ эргодических множеств.

Каждому элементу $f \in K$ отвечает некоторая совокупность распределений масс на T-границе бикомпакта $\mathfrak{M}_0$ [2, 3].

Если точка $f \in K$ является неподвижной точкой в K, то f можно рассматривать как „инвариантное среднее“; используя обобщенную теорему Кантора, можно показать, что в этом случае элементу f отвечает, по крайней мере, одно инвариантное распределение масс: некоторая инвариантная нормированная мера T-границы $\mathfrak{M}_0$ [1, 2].

Соответствующий смысл получают p-эргодичность и эргодичность подмножества $\mathfrak{M}$.

Одесский электротехнический институт связи

Поступило 26 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Мильман, ДАН, **59**, № 8 (1948). [2] Д. Мильман, ДАН, **57**, № 2 (1947). [3] Д. Мильман, ДАН, **59**, № 6 (1948). [4] Д. Мильман, ДАН, **59**, № 7 (1948).