Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

А. И. МАЛЬЦЕВ

О БЕСКОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 V 1949)

В настоящей заметке рассматриваются свойства разрешимых групп, т. е. групп, имеющих конечный нормальный ряд с коммутативными факторами. Общие свойства одного класса бесконечных непериодических разрешимых групп были изучены К. А. Гиршем ([1]). Ряд более тонких признаков, характеризующих отдельные классы периодических разрешимых групп, был получен в работах С. Н. Черникова ([2]), О. Ю. Шмидта ([3]), И. Д. Адо ([4]) и др. Мы указываем более широкие классы разрешимых групп и рассматриваем их свойства, некоторые из которых оказываются аналогичными свойствам периодических групп, рассматривавшихся в цитированных выше работах.

Разрешимые группы естественно классифицировать по свойствам фактор-групп их разрешимых нормальных рядов. Среди простейших коммутативных групп уже встречались следующие: A_1 — коммутативные группы, фактор-группы которых по их периодической части имеют конечный ранг; A_2 — группы типа A_1, периодическая часть которых имеет конечный ранг, т. е. распадается в прямое произведение конечного числа циклических и локально-циклических подгрупп; A_3 — группы типа A_1, периодическая часть которых разлагается в прямое произведение конечного числа циклических и примарных локально-циклических подгрупп; A_4 — группы типа A_1, периодическая часть которых конечна; A_5 — абелевы группы с конечным числом образующих.

Соответственно этому условимся разрешимую группу называть группой типа A_i, если она допускает конечный нормальный ряд, все фактор-группы которого являются абелевыми группами типа A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). В работе Гирша ([1]) разрешимые группы типа A_5 называются S-группами.

Подгруппы разрешимых A_i-групп, а также прямые произведения разрешимых групп типа A_i являются, очевидно, разрешимыми группами типа A_i ($i = 1, \ldots, 5$). Фактор-группы разрешимых A_i-групп для $i = 1, 2, 5$ являются разрешимыми A_i-группами. Если же $i = 3, 4$, то можно лишь утверждать, что фактор-группа разрешимой A_i-группы по периодическому нормальному делителю есть A_i-группа. Из теоремы об изоморфных уплотнениях следует, что сумма приведенных рангов* факторов разрешимой нормальной цепочки A_1-группы не зависит от выбора цепочки.

* Приведенный ранг аддитивно записываемой абелевой группы $\mathfrak{G}$ равен максимальному числу линейно независимых элементов в фактор-группе $\mathfrak{G}$ по ее периодической части.

Замечая, что всякая группа содержит единственный максимальный периодический нормальный делитель, мы имеем:

Теорема 1. *Фактор-группа разрешимой A_1-группы по ее максимальному периодическому нормальному делителю есть разрешимая группа, обладающая цепочкой нормальных делителей с абелевыми факторами типа A_4.*

В определении разрешимых A_i-групп рассматривались нормальные цепочки подгрупп. Из теоремы 1 следует, что в этом определении нормальные цепочки могут быть заменены главными, т. е. что всякая разрешимая A_i-группа содержит цепочку нормальных делителей, фактор-группы которой суть абелевы типа $A_i (i = 1, \ldots, 5)$.

Доказательства дальнейших свойств, здесь не указываемые, существенно опираются на следующую теорему:

Теорема 2. *Разрешимая группа матриц с элементами из алгебраически замкнутого поля содержит подгруппу конечного индекса, матрицы которой приводимы к совместной треугольной форме.*

Как обычно, конечную или бесконечную группу $\mathfrak{G}$ условимся называть нильпотентной, если нижний центральный ряд $\mathfrak{G}$ заканчивается единицей через конечное число шагов.

Теорема 3. *Каждая разрешимая группа типа A_3 содержит подгруппу конечного индекса, коммутант которой нильпотентен.*

Известно, что если какая-либо группа имеет максимальный нильпотентный нормальный делитель, то он единственен. Следующие теоремы ведут к установлению некоторого достаточного признака существования максимального нильпотентного нормального делителя.

Теорема 4. *Если все абелевы подгруппы локально нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ имеют тип A_1, то фактор-группа группы $\mathfrak{G}$ по ее максимальному периодическому нормальному делителю является нильпотентной A_4-группой. Локально нильпотентная разрешимая группа типа A_4 является нильпотентной.*

Из теоремы 4 и результатов С. Н. Черникова ([2]) вытекает, что локально нильпотентные группы, все абелевы подгруппы которых имеют тип A_3, являются разрешимыми. Далее, если каждое конечное множество элементов группы $\mathfrak{G}$ лежит внутри некоторого ее нильпотентного нормального делителя и все абелевы подгруппы $\mathfrak{G}$ имеют тип A_3, то $\mathfrak{G}$—нильпотентная A_3-группа.

Из последнего утверждения непосредственно следует

Теорема 5. *Если все абелевы подгруппы произвольной группы $\mathfrak{G}$ имеют тип A_3, то $\mathfrak{G}$ обладает максимальным нильпотентным нормальным делителем.*

В частности, максимальным нильпотентным нормальным делителем $\mathfrak{N}$ обладает каждая разрешимая A_3-группа $\mathfrak{G}$. Из теоремы 3 видно, что в этом случае фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ является конечным расширением своей абелевой подгруппы.

Аналогичное положение имеет место и для максимальных разрешимых делителей. Очевидно, каждая группа может содержать не более одного такого делителя. Далее, если всякое конечное множество элементов группы $\mathfrak{G}$ содержится в некотором разрешимом нормальном делителе $\mathfrak{G}$ и все разрешимые подгруппы $\mathfrak{G}$ имеют тип A_3, то группа $\mathfrak{G}$ разрешима.

Отсюда следует

Теорема 6. *Если все разрешимые подгруппы группы $\mathfrak{G}$ имеют тип A_3, то $\mathfrak{G}$ обладает максимальным разрешимым нормальным делителем.*

В основу классификации разрешимых групп выше была положена классификация факторов разрешимых нормальных рядов этих групп. Теорема 4 показывает, что иногда возможно получить те же классы, рассматривая непосредственно абелевы подгруппы разрешимых групп.

Имеет место также

Теорема 7. *Если все абелевы подгруппы разрешимой группы имеют тип A_5, то и сама группа имеет тип A_5.*

В доказательстве этой теоремы используется

Лемма. *Всякая разрешимая подгруппа группы автоморфизмов абелевой группы с конечным числом образующих имеет тип A_5.*

Из теоремы 7 и замечания, приведенного перед теоремой 6, вытекает, что если абелевы подгруппы некоторой группы $\mathfrak{G}$ имеют тип A_5 и каждое конечное множество элементов $\mathfrak{G}$ содержится внутри ее подходящего разрешимого нормального делителя, то группа $\mathfrak{G}$ разрешима.

Обращаясь к рассмотрению периодических подгрупп разрешимых групп типа A_4, легко заметить, что эти подгруппы будут конечны и что силовские подгруппы, принадлежащие одному и тому же простому числу, могут быть несопряженными и даже неизоморфными.

Поэтому следующее предложение может представлять интерес:

Теорема 8. *Периодические подгруппы разрешимой группы типа A_4 распадаются в конечное число классов сопряженных.*

Доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма. *Если группа $\mathfrak{G}$ содержит локально-нильпотентный нормальный делитель $\mathfrak{H}$ без элементов конечного порядка, в котором всякое уравнение $x^n = h$ $(n \neq 0,\ h \in \mathfrak{H})$ имеет решение, и если фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ счетна и локально конечна, то для каждой конечной подгруппы $\mathfrak{A}$ в группе $\mathfrak{G}$ существует содержащая $\mathfrak{A}$ дополнительная подгруппа $\mathfrak{B}$ со свойствами $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = 1$, $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$; если фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ конечна, то все дополнительные подгруппы сопряжены между собой.*

Для вывода леммы достаточно применить известные условия распада расширения группы.

Поступило
5 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. A. Hirsch, Proc. London Math. Soc., **11**, S. 44, 53, 336 (1938); **49**, 184 (1946). [2] С. Н. Черников, ДАН, **63**, 11 (1948). [3] О. Ю. Шмидт, Матем. сб., **17**, 145 (1945). [4] И. Д. Адо, ДАН, **54**, 475 (1946).