Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Я. М. КАЖДАН

О НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ПОВЫШАЮЩИХ РАЗМЕРНОСТЬ *

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 V 1949)

В настоящей работе будут рассмотрены некоторые свойства непрерывных отображений, повышающих размерность. Пусть дано отображение f пространства X на пространство Y.

Пусть $y = f(x)$. Кратностью $\mu(y)$ (соотв. $\mu(x)$) точки $y \in Y$ (соотв. $x \in X$) называется мощность множества $f^{-1}(y)$. Отображение называется конечнократным, n-кратным, счетнократным, если кратности всех точек пространства Y, или, что то же самое, пространства X, соответственно, конечны, $\leqslant n$, $\leqslant \aleph_0$.

Определение. Замкнутое множество M точек пространства X, принадлежащее прообразу некоторой точки $y \in Y$, называется правильным множеством, если образ любой окрестности $U(M)$ множества M содержит точку y как внутреннюю. Очевидно, отображение в том и только в том случае открыто, если каждая точка пространства X есть правильная точка.

Точка $y \in Y$ имеет порядок $\geqslant n$ при отображении XfY, если в ее прообразе содержится по крайней мере $n-1$ точек, не составляющих правильного множества при отображении f.

Теорема 1. *Пусть f — непрерывное отображение F_σ-пространства (т. е. пространства, представимого в виде суммы счетного числа компактов) на пространство Y. Пусть* $\dim Y - \dim X = n$. *Если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$, кратность которой $\geqslant n$, содержит по крайней мере n изолированных точек множества $f^{-1}(y)$, то в пространстве Y существует по крайней мере одна точка y, порядок которой $\geqslant n+1$.*

Замечание. Если пространство Y типа G_δ, то условия нашей теоремы выполнены для конечнократных и счетнократных отображений (так что в ней содержится теорема П. С. Александрова ([1])).

Лемма. *Если f — непрерывное отображение пространства X на пространство Y, при котором каждая точка пространства Y имеет порядок $< n+1$, то в замыкание множества X_k точек пространства X кратности $\leqslant k$ войдут только точки кратности $\leqslant n+k-1$.*

Доказательство. Обозначим через X^i множество точек пространства X кратности, равной i, и $f(X^i) = Y^i$. В замыкание $[X^i]$ войдут только точки кратности $\leqslant n+i-1$. В самом деле, пусть $x_1 \in [X^i]$ и $y^* = f(x_1)$. Предположим, что $\mu(y^*) \geqslant n+i$, следовательно, $x_1 \overline{\in} X^i$. В таком случае можно выделить последовательность точек y^m, $y^m \in Y^i$, $\lim y^m = y^*$, для которой выполнены следующие условия: пусть $f^{-1}(y^m) = \{x_1^m, \dots x_i^m\}$, последовательность x_1^m сходится к точке x_1,

* Вопросы, рассматриваемые здесь, поставлены мне П. С. Александровым.

последовательности x_j^m $(1 < j \leqslant i)$ либо сходятся, либо не имеют ни одной предельной точки. Пусть первые l последовательностей будут сходящимися: $\lim x_j^m = x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant l \leqslant i)$. Очевидно, $f(x_j) = y^*$. Согласно нашему предположению, множество $A = f^{-1}(y) \diagdown \{x_1, \ldots, x_l\}$ содержит по крайней мере n точек и, следовательно, является правильным множеством, что противоречиво, ибо образ окрестности $U(A) = X \diagdown \left[\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} f^{-1}(y^m) \right]$ не содержит ни одной точки y^m и, следовательно, не может содержать точку y^* как внутреннюю. $X_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} X^i$, следовательно, в замыкание $[X_k]$ войдут только точки кратности $\leqslant n + k - 1$, что и доказывает нашу лемму.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что порядок каждой точки Y при отображении f меньше n. Пусть $\{U_i\}$ — счетный базис пространства X. Рассмотрим всевозможные системы по n попарно не пересекающихся элементов базиса $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$, удовлетворяющие следующему условию: $f(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f(U_{i_n}) \neq 0$. Множество этих систем не более, чем счетно; перенумеруем их. Пусть $G_i = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$, а $f(G_i) = W_i$. В силу сделанного нами предположения, множество W_i обладает непустым открытым ядром V_i. Пусть $\Gamma_i = f^{-1}(V_i) \cap G_i$. Очевидно, $f(G_i) = V_i$. Так как Γ_i — открытое множество пространства X, то сделанное нами предположение остается справедливым и для индуцированного отображения f множества Γ_i на V_i. Обозначим множество точек Γ_i кратности $\leqslant k$ относительно отображения $f(\Gamma_i) = V_i$ через $X_k(\Gamma_i)$. По условию теоремы в прообразе каждой точки y пространства Y кратности $\mu(y) \geqslant n$ имеется по крайней мере n изолированных точек и, следовательно, существует такое i, при котором $y \in f\{X_n(\Gamma_i)\}$. Следовательно, $Y = f(X_{n-1}) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f\{X_n(\Gamma_i)\}$. Согласно лемме, точки, принадлежащие замыканию $\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)]$ (относительно Γ_i) множества $X_k(\Gamma_i)$, будут иметь кратности не более, чем $k + n - 1$ (относительно $f(\Gamma_i) = V_i$). Множество $\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)]$ есть F_σ. Пусть Z_{k-1} обозначает множество точек, имеющих при отображении f множества $\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)]$ кратность $\leqslant k - 1$. Так как Z_{k-1} есть G_δ относительно $\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)]$, то $\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)] \diagdown Z_{k-1}$ есть F_σ. Кратность точек при отображении f множества $\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)] \diagdown Z_{k-1}$ принимает не более чем n значений, значит, согласно теореме Гуревича [2], $\dim f\{\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)] \diagdown Z_{k-1}\} \leqslant \dim X + n - 1$. Множество $\Gamma_i[X_n(\Gamma_i)]$ содержится во множестве $\bigcup\limits_{k=1}^{2n-1} \{\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)] \diagdown Z_{k-1}\}$. По теореме сложения получаем $\dim f\{\Gamma_i[X_n(\Gamma_i)]\} \leqslant \dim \bigcup\limits_{k=1}^{2n-1} f\{\Gamma_i[X_k(\Gamma_i)] \diagdown Z_{k-1}\} \leqslant \dim X + n - 1$. Аналогичным образом можно доказать, что $\dim f[X_{n-1}] \leqslant \dim X + n - 1$. В результате получаем:

$$\dim Y = \dim \left\{ f[X_{n-1}] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} f\{\Gamma_i[X_n(\Gamma_i)]\} \right\} \leqslant \dim X + n - 1 < \dim Y.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. Требования, налагаемые на прообразы в теореме 1, оправдываются существованием открытого отображении одномерного континуума на квадрат [3].

Будем говорить, что пространство X удовлетворяет условию (α), если всякое нигде не плотное в нем множество имеет размерность меньшую, чем размерность пространства X.

Теорема 2. *Пусть пространство X есть F_σ, удовлетворяющее условию (α), и f — непрерывное отображение пространства X на пространство Y, причем $\dim Y - \dim X = n$. Если при отображении f в полном прообразе каждой точки $y \in Y$, кратность которой $\mu(y) \geqslant n+1$, имеется $n+1$ изолированных точек множества $f^{-1}(y)$, то найдется точка $y^* \in Y$, порядок которой $\geqslant n+2$.*

Доказательство. Предположим, что порядок каждой точки пространства Y меньше $n+2$. В отличие от доказательства теоремы 1, будем рассматривать системы по $n+1$ попарно непересекающихся элементов базиса пространства X, образы которых при отображении f имеют непустое пересечение. Тогда, сохраняя обозначения теоремы 1, можно будет написать

$$Y = f(X_n) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} f\{X_{n+1}(\Gamma_i)\}.$$

Докажем, что при наших предположениях размерность каждого слагаемого $\leqslant \dim X + n - 1$.

Согласно лемме все точки замыкания $[X_k]$ имеют кратность $\leqslant n+k$. Поэтому $[X_n] \subset \bigcup_{k=1}^{2n} \{[X_k] \setminus Z_{k-1}\}$. Множество $[X_k] \setminus Z_{k-1}$ есть F_σ. Так как кратность точек при отображении f множества $[X_k] \setminus Z_{k-1}$ принимает не более чем $n+1$ значение, то имеет место неравенство $\dim f\{[X_k] \setminus Z_{k-1}\} \leqslant \dim X + n - 1$. Действительно, если $\dim\{[X_k] \setminus Z_{k-1}\} = \dim X$, то множество $[X_k] \setminus Z_{k-1}$ удовлетворяет условию (α); в этом случае неравенство следует из теоремы Гуревича для F_σ, удовлетворяющих условию (α); если же $\dim\{[X_k] \setminus Z_{k-1}\} < \dim X$, то неравенство следует из теоремы Гуревича для любых F_σ. Так как $f[X_n] \subset \bigcup_{k=1}^{2n} f\{[X_k] \setminus Z_{k-1}\}$, то $\dim f[X_n] \leqslant \dim X + n - 1$.

Аналогично доказывается, что $\dim\{f\{X_{n+1}(\Gamma_i)\}\} \leqslant \dim X + n - 1$. В результате получаем:

$$\dim Y = \dim \left\{ f(X_n) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} f\{X_{n+1}(\Gamma_i)\} \right\} \leqslant \dim X + n - 1.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Предположение, что выполнено условие (α), существенно. В самом деле, пространство X, полученное как произведение канторова совершенного множества на отрезок, можно отобразить на квадрат так, что кратность каждой точки при этом отображении будет $\leqslant 2$. Так как отображение замкнуто, то каждый полный прообраз есть правильное множество. Следовательно, порядок каждой точки пространства Y будет $\leqslant 2 = n+1$. Отображаемое пространство X, очевидно, не удовлетворяет условию (α). В то же время следует заметить, что пространство X нельзя открыто отобразить на квадрат.

Теорема 3. *Если f — непрерывное отображение нульмерного компакта X на n-мерный куб I_n, то в I_n существует по крайней мере одна точка y порядка $\geqslant n+1$.*

Доказательство. Предположим, что каждая точка I_n имеет порядок $\leqslant n$. Пусть V — одновременно открытое и замкнутое множество пространства X. Тогда либо $f(V) = I_n$, либо $\dim f(V) \leqslant n-1$. Действительно, пусть $I_n \setminus f(V)$ не пусто и $\text{Гр}\, f(V)$ — граница $f(V)$. В силу нашего предположения, отображение f, рассматриваемое на множестве $f^{-1}\{\text{Гр}\, f(V)\} \cap V$, не более чем $n-1$-кратно. Так как V замкнуто, то $f\{f^{-1}\{\text{Гр}\, f(V)\} \cap V\} = \text{Гр}\, f(V)$. По теореме Гуревича ([2]), $\dim \text{Гр}\, f(V) \leqslant n-2$, следовательно ([4]), $\dim f(V) \leqslant n-1$.

Покроем компакт X конечным числом открыто-замкнутых множеств диаметра $<\varepsilon$. По крайней мере одно из них должно иметь своим образом весь куб, что легко приводится к противоречию.

Для дальнейшего напомним понятие, введенное П. С. Урысоном: точка p имеет относительно пространства X индекс $\leqslant\alpha$, если в любую окрестность точки p можно вписать окрестность, мощность границы которой $\leqslant\alpha$.

Теорема 4. *Если f — непрерывное отображение одномерного компакта X, удовлетворяющего условию* (α), *на n-мерный куб I_n, то в I_n существует точка порядка $\geqslant n+1$.*

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что компакт X не содержит изолированных точек. Предположим, что каждая точка I_n имеет порядок $<n+1$. Так как пространство X — одномерный компакт, удовлетворяющий условию (α), то $\mathrm{ind}_p X\leqslant\omega$ для любой точки $p\in X$[5], т. е. в любую окрестность $U(p)$ можно вписать окрестность $V(p)$ так, чтобы $\mathrm{Гр}\,V(p)$ состояло из конечного числа точек. Множество $D=f([V])$ либо совпадает со всем кубом, либо имеет размерность $\leqslant n-1$. В самом деле, пусть $I_n\setminus D$ не пусто и $\dim D=n$. Тогда $\dim \mathrm{Гр}\,D=n-1$. Очевидно, что $\dim\{\mathrm{Гр}\,D\setminus f(\mathrm{Гр}\,V)\}=$ $=\dim \mathrm{Гр}\,D=n-1$. Согласно нашему предположению, отображение на множестве $A=\{f^{-1}\{\mathrm{Гр}\,D\setminus f(\mathrm{Гр}\,V)\}\cap V\}$ не более чем $n-1$-кратно. Множество A, очевидно, есть F_σ и $f(A)=\mathrm{Гр}D\setminus f(\mathrm{Гр}\,V)$.

Если $\dim A=0$, то, в силу теоремы Гуревича, $\dim f(A)\leqslant n-2$. Если $\dim A=1$, то множество A удовлетворяет условию (α) и, следовательно, при $n>2$ можно применить теорему Гуревича для пространств, удовлетворяющих условию (α); получим $\dim f(A)\leqslant n-2$.

Если же $n=2$, то $\dim A=0$. В противном случае, в силу условия (α), A содержало бы открытое в X множество G. Пусть y^* — точка $f(G)\subset \mathrm{Гр}\,D$; существует сходящаяся к ней последовательность внутренних точек D: $y_k^*\to y^*$; $n=2$, следовательно, отображение на A взаимно-однозначно. Поэтому $f^{-1}(y^*)\cap[V]\subset G$. Так как G открыто, то $\left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(y_n^*)\right]\cap G=0$, следовательно, $y^*\,\overline{\in}\, f\left\{\left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(y_n^*)\right]\cap[V]\right\}$, что противоречит замкнутости отображения.

Таким образом, получаем: если $f[U]\neq I_n$, то $\dim f[U]\leqslant n-1$; последнее неравенство легко приводит к противоречию.

Теорема 5. *Пусть каждая точка x компакта L имеет $\mathrm{ind}_x L\leqslant\aleph_0$ и f — непрерывное отображение компакта L на n-мерный куб I_n. Тогда найдется точка, порядок которой $\geqslant n$.*

Доказательство. Предположим, что порядок каждой точки I_n меньше n. Пусть p — произвольная точка L и $[U]$ — ее замкнутая окрестность, граница которой имеет мощность $\leqslant\aleph_0$. Как и в предыдущих теоремах, достаточно доказать: если $f[U]\neq I_n$, то $\dim f([U])\leqslant$ $\leqslant n-1$. Допустим, что $\dim \mathrm{Гр}\,f(U)\leqslant n-1$. Так как $\mathrm{Гр}\,f(U)$ нигде не плотна, то, в силу нашего предположения, множество точек $\mathrm{Гр}\,f(U)$ кратности $\geqslant n-1$ при отображении $\{f^{-1}\{\mathrm{Гр}\,f(U)\}\cap[U]\}$ на $\mathrm{Гр}\,f(U)$ принадлежит множеству $f(\mathrm{Гр}\,U)$. Но множество $f(\mathrm{Гр}\,U)$ не более чем счетно, следовательно, $\dim f(\mathrm{Гр}\,U)=0$. Согласно теореме Фрейденталя [6], $0\geqslant\dim \mathrm{Гр}\,f(U)-(n-1)+1$. Следовательно, $\dim \mathrm{Гр}\,f(U)\leqslant$ $\leqslant n-2$, и поэтому $\dim f([U])\leqslant n-1$.

Поступило
11 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, ДАН, 4, 283 (1936). [2] H. Hurewicz, Journ. f. reine u. angew. Math., 169, 71 (1932). [3] Я. М. Каждан, ДАН, 56, № 4 (1947). [4] В. Гуревич и Г. Волмэн, Теория размерности, 1948. [5] П. Урысон, Mémoire sur les multiplicités cantoriennes, p. 2, Les lignes cantoriennes, 1927. [6] H. Freudenthal, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., 5, 34 (1932).