Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 1

МАТЕМАТИКА

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

РЯДЫ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ, ИМЕЮЩИМИ ОГРАНИЧЕННОЕ ИЗМЕНЕНИЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 I 1949)

Результаты, о которых идет речь в этой заметке, содержат оценки приближений функций их суммами Фурье, причем для них характерно то обстоятельство, что в них входит две константы: одна — связанная со всем классом приближаемых функций, а другая — с индивидуальными свойствами рассматриваемой функции данного класса.

Некоторые подобные результаты, относящиеся к наилучшим приближениям, были получены ранее в моих заметках ([1],[2]), представляющих собой развитие одного результата С. Н. Бернштейна ([3]).

Будем считать, как обычно,

$$\| f \|_{L_p} = \int_0^{2\pi} | f |^p \, dt, \quad \| f \|_{L_\infty} = \lim_{p\to\infty} \| f \|_{L_p} = \sup_t \operatorname{vrai} | f(t) | ,$$

где f — периодическая периода 2π функция. Ее сумму Фурье порядка n обозначим через $s_n(f) = s_n(f, x)$.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ периода 2π имеет производную $f^{(r)}(x)$ порядка r ограниченной вариации, имеющую точки разрыва $x_1, x_2, x_3, \ldots$ на периоде со скачками*

$$\sigma_k = | f^{(r)}(x_k + 0) - f^{(r)}(x_k - 0) | ,$$

то при $1 < p \leqslant \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\| f - s_n(f) \|_{L_p} \approx \frac{\nu_r^{(p)}}{n^{r+\frac{1}{p}}} \Big(\sum_k | \sigma_k |^p \Big)^{1/p} \quad (n \to \infty), \tag{1}$$

где

$$\nu_r^{(p)} = \frac{1}{\pi\Gamma(r+1)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-v} v^r \, \frac{v \cos\left(t - \frac{r+1}{2}\pi\right) - t \sin\left(t - \frac{r+1}{2}\pi\right)}{v^2 + t^2} \right|^p dt \right)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ предполагается, что для всех x имеет место $2f(x) = f(x+0) + f(x-0)$ и, как обычно,

$$\Big(\sum_k | \sigma_k |^p \Big)^{1/p} = \max_k | \sigma_k | .$$

В частности, $\nu_0^{(\infty)} = 1/2$. Число r можно считать и не целым, и тогда производная понимается в смысле Вейля.

Существенным моментом в доказательстве теоремы 1 является установление того обстоятельства, что эта теорема справедлива для функции

$$\varphi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{r+1}{2}\pi\right)}{k^{r+1}} \quad (r \geqslant 0),$$

представляющей собой, как известно, при целом $r \geqslant 0$ разложение в ряд Фурье полинома ($r+1$-й степени) Бернулли, заданного на интервале $(0, 2\pi)$.

Производная

$$\frac{d^r}{dx^r}\varphi_r(x) = \varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

есть простейшая разрывная периодическая функция с одним скачком при $x = 0$, равным π. Существенно используется также равенство

$$\| \varphi_r - s_n(\varphi_r) \|_{L_p} \approx \left(\int_{-\delta}^{\delta} | \varphi_r - s_n(\varphi_r) |^p \, dt \right)^{1/p} \quad (n \to \infty),$$

имеющее место при любых p и δ, удовлетворяющих

$$1 < p \leqslant \infty, \qquad 0 < \delta < \pi.$$

Кроме того, при доказательстве были использованы следующие теоремы, представляющие самостоятельный интерес.

Теорема 2 (принадлежит С. Б. Стечкину *). *Если функция f периода 2π имеет производную $f^{(r)}$ порядка $r \geqslant 0$ ограниченной вариации, то имеет место неравенство*

$$\| f - s_n(f) \|_{L_p} \leqslant \frac{C V^{1/p} \omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)^{1/q}}{n^{r+\frac{1}{p}}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 < p < \infty\right),$$

где C — константа, не зависящая от f, V — полная вариация $f^{(r)}$ на периоде, $\omega(\delta, f)$ — модуль колебания функции f для шага δ.

Теорема 3. *При соблюдении условий теоремы 2*

$$| f(x) - s_n(f, x) | \leqslant \frac{CV}{n^r}.$$

Если же $f^{(r)}(x)$ непрерывна, то

$$| f(x) - s_n(f, x) | = o(n^{-r}) \quad (n \to \infty).$$

Теоремы 1, 2 и 3 влекут за собой следствие, содержащее при $r = 0$ и $p = 2$ одно предложение С. М. Лозинского ([4]).

Следствие. Если выполнены условия теоремы 2, то для того, чтобы производная $f^{(r)}(x)$ была всюду непрерывной, необходимо и достаточно выполнение равенства, $1 < p \leqslant \infty$,

$$\| f - s_n(f) \|_{L_p} = o\left(n^{-r-\frac{1}{p}}\right) \quad (n \to \infty).$$

---

* Публикуется с его согласия.

В случае $p=1$ в формуле (1) появляется множитель $\lg n$, благодаря которому суммы Фурье, вообще говоря, не дают для рассматриваемого класса функций порядка, равного порядку наилучшего приближения.

В этом случае имеют место теоремы:

Теорема 4. *При условиях теоремы* 1 *справедливо*

$$\| f - s_n(f) \|_L \leqslant \frac{4}{\pi^2} \frac{\lg n}{n^{r+1}} \operatorname{var} f_*^{(r)} + o\left(\frac{\lg n}{n^{r+1}}\right) \quad (n \to \infty),$$

$$\| f - s_n(f) \|_L \leqslant C \frac{\lg n}{n^{r+1}} \operatorname{var} f^{(r)},$$

где C — *абсолютная константа*, $f_*^{(r)}$ *есть любая функция, отличающаяся от* $f^{(r)}$ *на абсолютно непрерывную на* $[0, 2\pi]$ *функцию, и* $\operatorname{var} \varphi$ — *полная вариация* φ *на* $[0, 2\pi]$.

Теорема 5. *При условиях теоремы* 1 *и если, кроме того,* $f^{(r)}(x)$ *распадается на чистую функцию скачков и на абсолютно непрерывную функцию,*

$$\| f - s_n(f) \|_L \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^{r+1}} \sum_k | \sigma_k | \quad (n \to \infty).$$

При доказательстве теоремы 5 мы базировались, кроме теоремы 4, на том обстоятельстве, полученном А. Н. Колмогоровым [5], что она выполняется для функции $\varphi_r(x)$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
2 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, ДАН, **55**, № 2 (1947). [2] С. М. Никольский, ДАН, **55**, № 3 (1947). [3] С. Н. Бернштейн, ДАН, **18**, № 7 (1938). [4] С. М. Лозинский, ДАН, **53**, № 8 (1946). [5] А. Н. Колмогоров, Ann. of Math., **36**, 521 (1935).