Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. А. ДАВЫДОВ

СХОДИМОСТЬ ЛАКУНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XII 1948)

1. Всюду под $\{\lambda_k\}$, $k=1, 2, 3, \ldots$, будем понимать последовательность целых положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > \lambda > 1, \quad k=1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Известно следующее:

Теорема А. Н. Колмогорова ([1], стр. 250). *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \tag{2}$$

сходится, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k x + \beta_k \sin \lambda_k x \tag{3}$$

сходится почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$.

Теорема А. Зигмунда ([2], стр. 123). *Если ряд* (3) *суммируем* T^* *на множество точек* $E \subset [0, 2\pi]$, $\operatorname{mes} E > 0$, *то ряд* (2) *сходится.*

В настоящей заметке мы вновь получили теорему А. Н. Колмогорова, присоединив к ней критерий сходимости в индивидуальной точке, и докажем одну теорему, аналогичную теореме А. Зигмунда. В дальнейшем мы воспользуемся следующей теоремой А. Плеснера.

Теорема А. Плеснера ([2]). *Если функция* $f(z)$ — *аналитическая внутри единичного круга, то окружность может быть разбита на три множества* E_1, E_2, E_3, *обладающих следующими свойствами:*

a) $\operatorname{mes} E_3 = 0$;

b) *в каждой точке* $\zeta_0 \in E_1$ *функция* $f(z)$ *приближается к единственному пределу по всем путям, не касательным к окружности* $|z|=1$;

c) *каков бы ни был угол с вершиной в точке* $\zeta_0 \in E_2$, *совокупность предельных значений функции* $f(z)$ *при приближении* z *к* ζ_0 *внутри этого угла покрывает всю плоскость.*

2. Лемма. *Пусть* (*рис.* 1) $\zeta \in \Gamma(|z|=1)$, $\angle A\zeta O = \angle O\zeta B = \alpha < \frac{\pi}{2}$, $P_n \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, $OB_n = OA_n = 1 - \frac{1}{P_n}$, $\zeta_n \in [B_n' A_n']$, $z_n = \left(1 - \frac{1}{P_n}\right)\zeta_n$, $\alpha_n = \zeta_n - \zeta$, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}$, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, a_k — *комплексные числа.*

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(z_n)-\sum_{k=1}^{n}a_k\zeta^{\lambda_k}\right]=0$$

равномерно относительно $\zeta\in\Gamma$, $P_n\in[\lambda_n,\ \lambda_{n+1}]$, $\zeta_n\in[A'_n B'_n]$.

Доказательство. Обозначим:

$$N_n(\zeta, P_n, \zeta_n)=\sum_{k=1}^{n}a_k\left[\left(1-\frac{1}{P_n}\right)\zeta_n\right]^{\lambda_k}-\sum_{k=1}^{n}a_k\zeta^{\lambda_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k\zeta^{\lambda_k}\left[\left(1-\frac{1}{P_n}\right)^{\lambda_k}\left(1+\frac{\alpha_n}{\zeta}\right)^{\lambda_k}-1\right],$$

$$R_n(\zeta, P_n, \zeta_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\zeta_n^{\lambda_k}\left(1-\frac{1}{P_n}\right)^{\lambda_k},\qquad q_n=\left(1-\frac{1}{P_n}\right)\left(1+\frac{\alpha_n}{\zeta}\right).$$

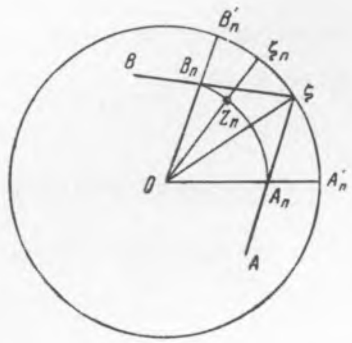

Рис. 1

Имеем

$$|N_n(\zeta, P_n, \zeta_n)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k||q_n^{\lambda_k}-1|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k||1-q_n|(1+|q_n|\lambda_k)=$$

$$=|1-q_n|\sum_{k=1}^{n}|a_k|+|1-q_n||q_n|\sum_{k=1}^{n}|a_k|\lambda_k<$$

$$<|1-q_n|\sum_{k=1}^{n}|a_k|+|1-q_n||q_n|\lambda_n\Theta_n,\ \text{где}\ \Theta_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{\lambda^{n-k}}.$$

Легко видеть, что

$$|1-q_n|=|\zeta-z_n|<\frac{C}{P_n\cos\alpha},\qquad \lim_{n\to\infty}\Theta_n=0. \tag{4}$$

В силу (1), (4) и условий леммы

$$\lim_{n\to\infty}N_n(\zeta, P_n, \zeta_n)=0 \tag{5}$$

равномерно относительно $\zeta\in\Gamma$, $P_n\in[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, $\zeta_n\in[A'_n B'_n]$.

Так как

$$|a_{n+p}|\left(1-\frac{1}{P_n}\right)^{\lambda_{n+p}}=|a_{n+p}|\left(1-\frac{1}{P_n}\right)^{P_n\frac{\lambda_{n+p}}{P_n}}<|a_{n+p}|\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda^{p-1}},$$

то

$$| R_n(\zeta, P_n, \zeta_n) | \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} | a_{n+p} | \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda^{p-1}} < \max_{p=1,2,\ldots} | a_{n+p} | \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda^{p-1}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\zeta, P_n, \zeta_n) = 0 \tag{6}$$

равномерно относительно $\zeta \in \Gamma$, $P_n \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, $\zeta_n \in [A_n', B_n']$.

Равенства (5) и (6) доказывают лемму.

Из леммы следует

Теорема 1. *Для того чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{\lambda_k}, \tag{7}$$

где $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, *сходился в точке* $\zeta \in \Gamma$ $(|z|=1)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k} \tag{8}$$

имела предельное значение по последовательности точек:

$$\left(1 - \frac{1}{P_n}\right)\zeta_n, \tag{9}$$

причем из равномерного стремления функции (8) *по последовательности* (9) *на множестве* $E \subseteq \Gamma$ *следует равномерная сходимость ряда* (7) *на этом множестве, и обратно.*

Эта теорема может рассматриваться для лакунарных рядов как обращение второй теоремы Абеля.

Следствие 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^2 < \infty$, то из теоремы 1 следует теорема А. Н. Колмогорова, причем теорема дает в этом случае необходимое и достаточное условие для сходимости ряда в фиксированной точке.

Следствие 2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^2 = \infty$, то функция (8) не может иметь предельных значений по последовательности (9) (и тем более по радиусам) на множестве $E \subset \Gamma$, mes $E > 0$.

Это следствие получается из теоремы 1 со ссылкой на теорему Зигмунда.

Следствие 3. Если тригонометрический ряд (3) сходится почти всюду к функции, ограниченной на множестве меры 2π, то последовательность его частных сумм равномерно ограничена на всей окружности.

Это вытекает из теоремы 1 со ссылкой на ограниченность тех представимых интегралом Коши аналитических функций (функции классов H_δ, где $\delta \geqslant 1$), для которых их угловые предельные значения ограничены на множестве меры 2π.

Из нашей леммы и теоремы А. Плеснера следует далее:

Теорема 2. *Пусть E — множество всех точек $\zeta \in \Gamma$, для каждой из которых последовательность частных сумм ряда* (7) *всюду плотна во всей плоскости z.*

Тогда $\operatorname{mes} E = 0$ *или* $\operatorname{mes} E = 2\pi$, *в зависимости от того, будет ли ряд* (2) *сходящимся или расходящимся.*

Доказательство. Пусть $0 < \operatorname{mes} E < 2\pi$. Тогда, на основании нашей леммы и теоремы А. Плеснера, функция (8) почти всюду на $\Gamma - E$, $\operatorname{mes}(\Gamma - E) > 0$, имеет предельные значения по некасательным путям. Но тогда, по лемме, почти всюду на $\Gamma - E$ сходится ряд (7), а следовательно, по теореме А. Зигмунда, сходится ряд (2), где $\alpha_k + i\beta_k = a_k$.

По теореме А. Н. Колмогорова почти всюду на Γ сходится ряд (7). Противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. Если последовательность частных сумм ряда (3) выпускает некоторый сколь угодно малый отрезок $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ для точек $x \in E$, $E \subset [0, 2\pi]$, $\operatorname{mes} E > 0$, то ряд (2) сходится.

Последнее следствие является аналогом теоремы А. Зигмунда.

Заметим, что если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \infty$, то функция (8) имеет в качестве множества всех предельных значений по последовательности (9) всю плоскость z для почти всех $\zeta \in \Gamma$ ($|z| = 1$), а последовательность частных сумм ряда (3) всюду плотна на действительной оси для почти всех $x \in [0, 2\pi]$.

Калининский государственный
педагогический институт им. М. И. Калинина

Поступило
23 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939. [2] Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, 1941, стр. 377.