Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Б. А. ВОСТРЕЦОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XII 1948)

1. Эта заметка посвящена доказательству следующих предложений.

Теорема 1. *Для всякого степенного ряда с единичным кругом сходимости существует мажорантный ряд, сумма которого имеет угловые предельные значения почти всюду на единичной окружности.*

Теорема 2. *Всякую функцию, аналитическую в единичном круге, можно представить в виде интеграла*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\omega(\zeta)\, g\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

где $\omega(\zeta)=\omega(e^{i\theta})$ — *некоторая функция класса* L_2 *в интервале* $(0, 2\pi)$, *а* $g(t)$ — *целая функция от* t.

Эти теоремы вытекают почти непосредственно из следующей леммы, имеющей самостоятельный интерес.

Лемма. *Для всякой последовательности комплексных чисел* $\{a_n\}$ *таких, что* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant 1$, *существует целая функция* $\psi(t)$ *первого порядка и минимального типа, удовлетворяющая условиям:*

$$|\psi(n)|>|a_n| \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

2. Обратимся к доказательству леммы. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел таких, что

$$1+\varepsilon_n>\sqrt[n]{|a_n|} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Положим $[n\varepsilon_n]+1=\nu_n$; лакунарный степенной ряд $\sum\limits_1^\infty\frac{|a_k|}{k^{\nu_k}}t^{\nu_k}=\psi(t)$ представляет, очевидно, целую функцию первого порядка и минимального типа (так как $\sqrt[\nu_k]{\frac{|a_k|}{k^{\nu_k}}\nu_k^{\nu_k}}<\frac{\nu_k}{k}(1+\varepsilon_k)^{1/\varepsilon_k}\to 0$ при $k\to\infty$).

Для значений этой функции в точках $t=n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ получаем

$$\psi(n)>\frac{|a_n|}{n^{\nu_k}}n^{\nu_n}=|a_n|,$$

чем и заканчивается доказательство.

3. Пусть теперь $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ — произвольный степенной ряд с единичным кругом сходимости. В силу леммы существует целая функция $\psi(t)$ первого порядка и минимального типа такая, что $|a_n| < \psi(n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Образуем степенной ряд: $\sum\limits_1^\infty \psi(n) z^n$. С одной стороны, он является мажорантным для ряда $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$, с другой же стороны, по известной теореме Вигерта, он представляет целую функцию от $\frac{1}{1-z}$ и, следовательно, имеет угловые граничные значения во всех точках единичной окружности, за исключением, быть может, точки $z=1$. Итак, теорема 1 также доказана.

4. Пусть снова $\sum\limits_0^\infty a_n z^n = f(z)$ — степенной ряд с единичным кругом сходимости. Тогда $\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} \leqslant 1$ и, в силу леммы, существует целая функция $\varphi(t)$ первого порядка и минимального типа такая, что $\varphi(n) > n|a_n|$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Так как ряд $\sum\limits_0^\infty \left|\frac{a_n}{\varphi(n)}\right|^2$ сходится, то, по теореме Фишера — Рисса, можно утверждать, что числа $\mathrm{Re}\left\{\frac{a_n}{\varphi(n)}\right\}$ и $\mathrm{Im}\left\{\frac{a_n}{\varphi(n)}\right\}$ являются коэффициентами Фурье некоторой функции $\omega(\zeta) = \omega(e^{i\theta})$, принадлежащей классу L_2 в интервале $(0, 2\pi)$. Для чисел $\frac{a_n}{\varphi(n)}$ имеем представления:

$$\frac{a_n}{\varphi(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\omega(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n=0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Заметим, наконец, что ряд $\sum\limits_0^\infty \varphi(n) z^n$ изображает функцию вида $g\left(\frac{1}{1-z}\right)$, где $g(t)$ — целая функция t (теорема Вигерта).

Следовательно,

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty \varphi(n)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta\cdot z^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \omega(\zeta)\sum_0^\infty \varphi(n)\,\frac{z^n}{\zeta^n}\,\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \omega(\zeta)\, g\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

что и выражает собой теорему 2.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 XII 1948