Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. Я. ВИЛЕНКИН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 I 1949)

В этой заметке мы хотим перенести в теорию топологических групп конструкцию, примененную Кете и Теплицем для построения лишенных сходимости линейных координатных пространств (1), распространить на получающиеся при помощи этой конструкции топологические группы некоторые результаты Кете и Теплица и установить некоторые связи упомянутой конструкции с теорией характеров.

Пусть нам дано некоторое множество топологических групп G_α; G_β; . . . ; G_ω; . . . , занумерованных при помощи системы индексов, пробегающих некоторое множество M. Рассмотрим некоторую систему A подмножеств множества M. Через A^* обозначим систему всех подмножеств множества M, пересечение которых с любым множеством системы A конечно. Очевидно, что $A \subset (A^*)^*$ и $A^* = ((A^*)^*)^*$. Система A называется совершенной, если $A = (A^*)^*$. Очевидно, что совершенная система содержит вместе с двумя множествами и их объединение, а также содержит все конечные подмножества из M.

Определим теперь при помощи совершенной системы A следующим образом новую топологическую группу G. За элемент группы G примем любую совокупность элементов $x = (x_\alpha;\ x_\beta;\ \ldots;\ x_\omega;\ \ldots)$, где все $x_\omega \in G_\omega$ и множество тех индексов, для которых x_ω отлично от единицы e_ω группы G_ω, образует подмножество множества M, принадлежащее системе A. Групповая операция в группе G вводится равенством:

$$xy = (x_\alpha;\ x_\beta;\ \ldots;\ x_\omega;\ \ldots)(y_\alpha;\ y_\beta;\ \ldots;\ y_\omega;\ \ldots) = \\ = (x_\alpha y_\alpha;\ x_\beta y_\beta;\ \ldots,;\ x_\omega y_\omega;\ \ldots).$$

Для того чтобы ввести в группу G топологию, зададим полную систему окрестностей единицы. Пусть L — некоторое множество из системы A^*. В каждой из групп G_ω, занумерованной индексом из множества L, зададим окрестность единицы U_ω и рассмотрим множество всех элементов $x = (x_\alpha;\ x_\beta;\ \ldots;\ x_\omega;\ \ldots)$ группы G, для которых $x_\omega \in U_\omega$, если $\omega \in L$. Легко видеть, что совокупность всех получающихся таким образом множеств удовлетворяет требованиям, налагаемым на полную систему окрестностей единицы топологической группы, и тем самым G превращается в топологическую группу, которую мы будем обозначать

$$G = A(G_\alpha;\ G_\beta;\ \ldots;\ G_\omega;\ \ldots).$$

Назовем операцию, определенную системой множеств A^*, дополнительной к операции, определенной системой A.

Теорема 1. *Пусть G_α; G_β; . . . ; G_ω; . . . — счетное множество топологических абелевых групп. X_ω — группа характеров группы G_ω и A — некоторая совершенная система подмножеств множеств M индексов.*

Тогда группа $A^*(X_\alpha; X_\beta; \ldots; X_\omega; \ldots)$ будет группой характеров группы $A(G_\alpha; G_\beta; \ldots; G_\omega; \ldots)$.

При этом под группой характеров топологической абелевой группы мы понимаем, следуя Л. С. Понтрягину ([2]), группу, элементами которой являются представления группы G в группу вращений окружности, а топология вводится при помощи бикомпактных подмножеств группы G.

Следствие. Если для групп G_α; G_β; . . . ; G_ω; . . . выполнен принцип двойственности, т. е. G_ω является группой характеров своей группы характеров X_ω, то и для группы $A(G_\alpha; G_\beta; \ldots; G_\omega; \ldots)$ выполнен принцип двойственности.

Теорема 2. *Пусть G_α; G_β; . . . ; G_ω; . . . — некоторое множество полных групп. Тогда и группа $A(G_\alpha; G_\beta; \ldots; G_\omega; \ldots)$ также полна.*

При этом под полнотой группы мы понимаем, что любая центрированная система замкнутых множеств, содержащая сколь угодно малые справа множества, имеет непустое пересечение.

Легко видеть, что операция образования топологического прямого произведения, а также операция образования алгебраического прямого произведения (см. ([3])) могут быть описаны при помощи некоторых совершенных систем подмножеств. В первом случае надо взять систему, состоящую из всех подмножеств, а во втором — состоящую лишь из конечных подмножеств. Аналогично, при помощи систем подмножеств можно описывать операции, получаемые при помощи последовательного применения этих операций, т. е. операции вида

$$\sum_\alpha \mathop{\mathrm{S}}_\beta G_{\alpha\beta}; \qquad \mathop{\mathrm{S}}_\alpha \sum_\beta G_{\alpha\beta}; \qquad \mathop{\mathrm{S}}_\alpha \sum_\beta G_{\alpha\beta} \dotplus \sum_\alpha \mathop{\mathrm{S}}_\beta G'_{\alpha\beta} \quad \text{и т. д.}$$

Мы можем также продолжить этот процесс при помощи трансфинитной индукции, таким же образом, как это делается в теории борелевских множеств ([4]), и получить из каждой заданной совокупности групп наименьшую совокупность групп, содержащих вместе с каждым множеством групп, имеющим заданную мощность, их алгебраическое, а также их топологическое прямое произведение.

При этом естественным образом возникает «борелевская» классификация групп, причем имеет место

Теорема 3. *Пусть G_1; G_2; . . . ; G_n; . . . — некоторое счетное множество локально компактных абелевых групп со второй аксиомой счетности. Тогда для любого α существует группа борелевского класса α, не принадлежащая никакому борелевскому классу $\beta < \alpha$. Существует группа, получающаяся из групп G_1; G_2; . . . ; G_n; . . . применением некоторой операции A, не принадлежащая ни одному из борелевских классов.*

Определение 1. Назовем некоторый класс топологических абелевых групп замкнутым, если вместе с каждой группой он содержит все ее замкнутые подгруппы, все ее фактор-группы, ее группу характеров и вместе с любыми двумя группами содержит их прямую сумму.

Примером замкнутого класса является совокупность локально компактных абелевых групп со второй аксиомой счетности.

Определение 2. Класс абелевых групп называется *инволюционным*, если для любой группы этого класса выполнен принцип двойственности.

Определение 3. Множество абелевых групп называется *множеством образующих замкнутой системы*, если наименьшая замкнутая система, содержащая эти группы, совпадает с данной системой.

Определение 4. Топологическая абелева группа G называется *волокнистой*, если ее компонента нуля $K[G]$ является локально компактной абелевой группой со второй аксиомой счетности, а фактор-группа $G/K[G]$ содержит открытую слабо сепарабельную ([3]) подгруппу счетного индекса.

Теорема 4. *Если группа G принадлежит замкнутому инволюционному классу, для которого существует система образующих, состоящая из групп, получаемых из счетного множества локально компактных абелевых групп со второй аксиомой счетности применением некоторой операции A, то G будет волокнистой группой.*

Обратно, совокупность всех волокнистых групп образует замкнутый инволюционный класс групп, для которого образующей группой является группа, получаемая из локально компактных абелевых групп со второй аксиомой счетности применением некоторой операции вида A.

Доказательство теоремы опирается на следующие две леммы, представляющие самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть G — компактная абелева группа со второй аксиомой счетности и H — ее всюду плотное множество. Тогда существует такое компактное подмножество $F \subset H$, что если характер χ таков, что $|\chi(f)| < 1/20$ для всех $f \in F$, то $\chi = 0$.*

Лемма 2. *Если H — всюду плотная подгруппа компактной абелевой группы G со второй аксиомой счетности и X — группа характеров группы H, то X совпадает с группой характеров группы G.*

Поступило
6 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Köthe u. O. Toeplitz, J. f. reine u. angew. Math., **171**, H. 4, 193 (1934).
[2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 1938. [3] Н. Я. Виленкин, Матем. сб., **19** (61): 2, 311 (1946). [4] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937, стр. 86.