Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. М. ДЖРБАШЯН

# О ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

*(Представлено академиком М. В. Келдышем 7 IV 1949)*

Критерии полноты полиномов в неограниченных областях, приведенные в нашей предыдущей заметке [1], позволяют получить также признаки полноты для систем аналитических функций вида $\{z^{\lambda_n}\}$ или $\{g(a_n z)\}$, где $g(z)$ — целая функция, в соответствующих областях.

Некоторые из этих признаков приводятся в настоящей заметке.

1°. Рассмотрим систему функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в плоскости $z$ с разрезом $(-\infty, 0)$, где $\{\lambda_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqslant C > 0$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Пусть угол $\Delta_\alpha$ с раствором $\pi\alpha$ $(0<\alpha<2)$ лежит в плоскости $z$, разрезанной вдоль полуоси $(-\infty, 0)$.

Обозначим через $H_2(e^{-\mu r^p})$ класс голоморфных в угле $\Delta_\alpha$ функций $f(z)$, для которых существует интеграл

$$\iint\limits_{\Delta_\alpha} e^{-\mu r^p} \, |f(z)|^2 \, dx\, dy, \quad r=|z| \quad (\mu>0,\ p>0).$$

Теорема 1'. *Для полноты системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в классе $H_2(e^{-\mu r^p})$ в смысле*

$$\inf_{\{Q_\lambda\}} \iint\limits_{\Delta_\alpha} e^{-\mu r^p} \, |f(z)-Q_\lambda(z)|^2 \, dx\, dy = 0,$$

*где $\{Q_\lambda\}$ — всевозможные суммы вида $\sum\limits_1^n a_k z^{\lambda_k}$, достаточно и, вообще говоря, необходимо, чтобы функция последовательности $\{\lambda_n\}$*

$$\psi(r)=\exp\left\{2\sum_{\lambda_n<r}\lambda_n^{-1}\right\}$$

*удовлетворяла условию:*

*существует неубывающая функция $h(r)$ такая, что*

$$1)\ \int^{\infty}\frac{h^p(r)}{r^2}\,dr=+\infty, \qquad 2)\ h(r)\leqslant Ar^{-\alpha}\psi(r) \quad \text{при } r\geqslant r_0 \quad (A>0).$$

Соответствующий результат имеет место и для равномерно взвешенного приближения.

Обозначим через $A(e^{-\mu r^p})$ класс голоморфных внутри области $\Delta_\alpha$ функций $f(z)$, для которых

1) функция $\exp\{-\mu|z|^p\} f(z)$ непрерывна в замкнутом угле $\bar{\Delta}_\alpha$;
2) $\lim\limits_{z \to \infty} \exp\{-\mu|z|^p\} f(z) = 0$.

Теорема 1″. *Для полноты системы функций* $\{z^{\lambda_n}\}$ *в классе* $A(e^{-\mu r^p})$ *в смысле*

$$\inf_{\{Q_\lambda\}} \exp\{-\mu|z|^p\} |f(z) - Q_\lambda(z)| = 0, \quad z \in \bar{\Delta}_\alpha,$$

*достаточно и, вообще говоря, необходимо, чтобы функция* $\psi(r)$ *последовательности* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяла условию теоремы* 1′.

Отметим, что в случае, когда все числа $\lambda_n$ целые, надо дополнительно требовать, чтобы $p \geqslant (2-\alpha)^{-1}$.

Следствие. Если, в частности,

$$\liminf_{r \to \infty} \left\{ \sum_{\lambda_n < r} \lambda_n^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \alpha\right) \log r \right\} > -\infty,$$

то система $\{z^{\lambda_n}\}$ полна в смысле теорем 1′ и 1″.

2°. Пусть неограниченная линия $L$ топологически эквивалентна бесконечной оси $(-\infty, +\infty)$, лежит между углами с растворами $\pi\alpha$ и $\pi\beta$ $(0 < \beta \leqslant \alpha < 2)$ и с вершинами соответственно в точках 0 и $a$ $(a > 0)$.

Полагая, что линия $L$ спрямляема в любой конечной части плоскости и при $|z| \geqslant r_0$ $|dz| < A\, d|z|$ $(A > 0)$, если $z \in L$, имеем:

Теорема 2. *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяет условию теоремы* 1′ *при* $p \geqslant 1/\beta$, *то для любой непрерывной на* $L$ *функции* $f(z)$, *для которой* $\lim\limits_{|z| \to \infty} f(z) = 0$, *система функции* $\{1, z^{\lambda_n}\}$ *полна на* $L$ *в смысле*

$$\inf_{\{Q_\lambda\}} |f(z) - e^{-\mu|z|^p} Q_\lambda(z)| = 0.$$

Заметим, что при $p < 1/\beta$ система $\{1, z^{\lambda_n}\}$ не будет полной на $L$. В случае, когда все числа $\{\lambda_n\}$ целые, следует полагать, что $p \geqslant \max\left(\frac{1}{2\alpha - 1}, \frac{1}{\beta}\right)$.

3°. Пусть для целой функции $g(z)$ порядка $\rho$ и типа $\sigma$ $g^{(\lambda_n)}(0) \neq 0$, где $\{\lambda_n\}$ — любая последовательность целых чисел, удовлетворяющая условиям 1) и 2) теоремы 1′.

Теорема 3. *Система целых функций* $\{g(a_n z)\}$ *полна в классе* $H_2(e^{-\mu r^p})$ $(\mu > 0,\ p \geqslant (2-\alpha)^{-1})$ *в смысле*

$$\inf_{\{Q_g\}} \iint_{\Delta_\alpha} e^{-\mu r^p} |f(z) - Q_g(z)|^2 \, dx\, dy = 0,$$

*где* $\{Q_g\}$ — *всевозможные суммы вида* $\sum\limits_1^n c_k g_k(a_k z)$, *или в классе* $A(e^{-\mu r^p})$ $(\mu > 0,\ p \geqslant (2-\alpha)^{-1})$ *в смысле*

$$\inf e^{-\mu|z|^p} |f(z) - Q_g(z)| = 0, \quad z \in \bar{\Delta}_\alpha,$$

*если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *При* $\rho < p$ *любому из предельных соотношений:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \dfrac{n}{|a_n|^{\frac{p\rho}{p-\rho}}} > d;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \dfrac{n}{|a_n|^{\frac{p\rho}{p-\rho}}} > ed;$

c) *точки* $a_n$ *лежат в некотором угле с раствором* $2\omega$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{n}{|a_n|^{\frac{p\rho}{p-\rho}}} > \frac{\omega d}{\pi B}, \quad \textit{если } \omega > \frac{b(p-\rho)}{p\rho},$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{n}{|a_n|^{\frac{p\rho}{p-\rho}}} > \frac{(p-\rho)\,d}{\pi p\rho} \sec \frac{\omega p\rho}{p-\rho}, \quad \textit{если } \omega \leqslant \frac{b(p-\rho)}{p\rho},$$

*где*

$$d = (\sigma\rho)^{\frac{p}{p-\rho}} \left(\frac{2}{\mu p}\right)^{\frac{p}{p-\rho}}, \quad B = \max_{[0,\,\pi/2]} (x\cos x) = b\cos b.$$

2) *При* $\rho = p$ *и* $\sigma < \mu/2$ *последовательность* $\{a_n\}$ *лежит в круге* $|z| < \sqrt[p]{\mu(2\sigma)^{-1}}$ *и имеет предельную точку внутри круга.*

Относительно необходимости условий теоремы можно отметить только, что при $p < (2-\alpha)^{-1}$ система функций $\{g(a_n z)\}$ не будет полной в угле $\Delta_\alpha$ для любой последовательности $\{a_n\}$.

4°. Как в случае полиномиальных приближений, так и в данном случае можно указать критерии полноты системы $\{g(a_n z)\}$, исходя из уравнения границы бесконечной области.

Пусть непрерывная неограниченная линия $L_\gamma$ топологически эквивалентна бесконечной оси и уравнения ее бесконечных ветвей имеют вид

$$y = ax^\gamma, \quad y = bx^\gamma \quad (a > b,\ \gamma < 1) \quad \text{при } x \geqslant x_0.$$

Полагая, что для целой функции порядка $\rho$ и типа $\sigma$ $g^{(k)}(0) \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, имеем:

Теорема 4. *Для произвольной непрерывной на* $L_\gamma$ *функции* $f(z)$, *для которой* $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, *система функций* $\{g(a_n z)\}$ *полна в смысле*

$$\inf_{\{Q_g\}} \left| f(z) - \exp\left\{ -\frac{\pi |z|^\gamma}{(1-\gamma)(a-b)} \right\} Q_g(z) \right| = 0, \quad z \in L_\gamma,$$

*если*

$$\lim_{r\to\infty} \sup r^{-\rho} (\log r)^{-\frac{\rho}{1-\gamma}} \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt > \sigma \left[ \frac{\rho(a-b)(1-\gamma)}{\pi} \right]^{\frac{\rho}{1-\gamma}},$$

*где* $n(t)$ — *числовая функция последовательности* $\{a_n\}$.

Отметим также следующий результат относительно полноты полиномов.

Пусть $P(r)$ — вещественная функция, заданная на полуоси $(0, +\infty)$, представимая в виде

$$P(r) = P(1) + \int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt \quad \text{при } r \geqslant 1,$$

где $\lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t) \uparrow +\infty$.

Если $f(z)$ — произвольная функция, заданная на $L_\gamma$, для которой

$$\int_{L_\gamma} |f(z)|^2 d\sigma < +\infty,$$

то имеет место

Теорема 5. *Для полноты системы полиномов на линии $L_\gamma$ в смысле*

$$\inf_{\{Q\}} \int_{L_\gamma} | f(z) - e^{-P(|z|)} Q(z)|^2 d\sigma = 0,$$

*необходима и достаточна расходимость интеграла*

$$\int^{\infty} P(r) \exp\left\{- \frac{\pi r^{1-\gamma}}{(1-\gamma)(a-b)}\right\} \frac{dr}{r^\gamma}.$$

Соответствующий результат имеет место и в случае равномерного приближения.

Институт математики и механики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
27 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Джрбашян, ДАН, 66, № 6 (1949).