Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. О. ГЕЛЬФОНД

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

В статье „Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел" ([1]) мною были изложены основы одного метода, позволяющего решать некоторые проблемы алгебраической независимости трансцендентных чисел. Различные варианты этого метода служат для доказательства трех теорем, которые я сейчас сформулирую.

Для сокращения изложения я введу несколько обозначений и определений, которые будут иметь один и тот же смысл в дальнейшем. Полином $Q(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$ будет всегда неприводимым в рациональном поле полиномом с целыми рациональными коэффициентами, общий наибольший делитель которых равен единице. Этот полином может содержать и не все $x_1, x_2, \ldots, x_s$, но быть функцией хотя бы одного x обязан. Мы будем говорить, что два таких полинома Q_1 и Q_2 различны, если $Q_1 \neq \pm Q_2$. Мы будем говорить, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ алгебраически независимы в рациональном поле, если равенство $Q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = 0$ невозможно ни при каком $Q(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Далее, мы будем говорить, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ алгебраически выражаются через одно из них, если имеют место одновременно s уравнений $Q_k(\alpha_k, \alpha_i) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$, где все $Q_k(x, y)$ обязательно содержат x. Наконец, расширим рациональное поле присоединением к нему одного трансцендентного числа, а полученное поле R_0 расширим, в свою очередь, присоединением к нему корня какого-либо алгебраического уравнения с коэффициентами из поля R_0. Любое такое поле или просто алгебраическое поле мы будем называть полем R_1. Очевидно, что если мы расширим любое алгебраическое поле присоединением к нему чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, то полученное поле будет полем R_1 тогда и только тогда, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ алгебраически выражаются через одно из них.

Теорема 1. *Пусть числа η_0, η_1, η_2, так же как и числа $1, \alpha_1, \alpha_2$, будут линейно независимы в рациональном поле и неравенство*

$$|x_0\eta_0 + x_1\eta_1 + x_2\eta_2| > e^{-\gamma x \ln x}, \quad |x_i| \leqslant x, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\gamma > 0$ — постоянная, а x_0, x_1, x_2 — целые рациональные числа, будет иметь место при $x > x'$. Тогда расширение рационального поля путем присоединения к нему 11 чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, e^{\eta_i \alpha_k}, \quad i = 0, 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \quad \alpha_0 = 1, \tag{2}$$

никогда не может дать поля R_1.

Следствия. 1. При $\eta_0 = \ln a$, $\eta_1 = \alpha \ln a$, $\eta_2 = \alpha^2 \ln a$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^2$, где α и $a \neq 0, 1$ — алгебраические числа, причем α степени не ниже третьей, мы получаем, что четыре числа $a^\alpha, a^{\alpha^2}, a^{\alpha^3}, a^{\alpha^4}$ не могут быть алгебраически выражены через одно из них. В частности, когда α — кубическая иррациональность, a^{α} и a^{α^2} алгебраически независимы.

2. При $\eta = \ln a$, $\eta_1 = e^{\nu} \ln a$, $\eta_2 = e^{2\nu} \ln a$, $\alpha_1 = e^{\nu}$, $\alpha_2 = e^{2\nu}$, где $a \neq 0, 1$ — алгебраическое, а $\nu \neq 0$ — рациональное, мы получаем, что четыре числа $a^{e^{\nu}}$, $a^{e^{2\nu}}$, $a^{e^{3\nu}}$, $a^{e^{4\nu}}$ не могут быть алгебраически выражены через одно из них и, в частности, хотя бы одно их них должно быть трансцендентным числом.

3. При $\eta_1 = \alpha\eta_0$, $\eta_2 = \alpha^2\eta_0$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^2$, $s = 0, 1, 2$, $\eta_0 \neq \alpha^s \ln a$, где $a \neq 0, 1$ и α — алгебраические, причем α — кубическая иррациональность, мы получаем, что η_0 не может быть общим корнем двух уравнений

$$Q_1(e^{\eta}, e^{\alpha\eta}, e^{\alpha^2\eta},) = 0, \quad Q_2(e^{\eta}, e^{\alpha\eta}, e^{\alpha^2\eta}) = 0, \tag{3}$$

где Q_1 и Q_2 различны.

Теорема 2. *Пусть* $\eta_0 \neq 0$, η_1 / η_0 *иррационально, числа* $1, \alpha_1, \alpha_2$ *линейно независимы в рациональном поле и при* $x > x'$ *выполняется неравенство*

$$| x_0\eta_0 + x_1\eta_1 | > e^{-\gamma x^2 \ln x}, \quad \gamma > 0, \quad | x_i | < x, \quad i = 0, 1, \tag{4}$$

где γ — *постоянное, а* x_0 *и* x_1 — *целые рациональные числа.*

Тогда расширение рационального поля путем присоединения к нему 10 чисел

$$\eta_0, \eta_1, \alpha_1, \alpha_2, e^{\eta_i \alpha_k}, \quad i = 0, 1, \quad k = 0, 1, 2, \quad \alpha_0 = 1 \tag{5}$$

никогда не может быть полем R_1.

Следствия. 1. При $\eta_0 = 1$, $\eta_1 = e^{\nu}$, $\alpha_1 = e^{\nu}$, $\alpha_2 = e^{2\nu}$, где $\nu \neq 0$ — рациональное число, мы получаем, что три числа $e^{e^{\nu}}$, $e^{e^{2\nu}}$, $e^{e^{3\nu}}$ не могут быть алгебраически выражены через число e и хотя бы одно из них трансцендентно.

2. При $\eta_0 = \ln a$, $\eta_1 = \ln^{\nu+1} a$, $\alpha_1 = \ln^{\nu} a$, $\alpha_2 = \ln^{2\nu} a$, где $a \neq 0, 1$ — алгебраическое, а $\nu \neq 0$ — рациональное число, мы получаем, что три числа $a^{\ln^{\nu} a}$, $a^{\ln^{2\nu} a}$, $a^{\ln^{3\nu} a}$ не могут быть алгебраически выражены через $\ln a$ и хотя бы одно из них трансцендентно. Отсюда следует трансцендентность хотя бы одного числа из трех: $e^{\pi^{\nu}+1}$, $e^{\pi^{2\nu}+2}$, $e^{\pi^{3\nu}+1}$.

Из приведенных теорем можно получить и ряд других следствий.

Тот же метод позволяет значительно обобщить и улучшить некоторые ранее полученные мной результаты ([2],[3]).

Теорема 3. *Пусть* $a \neq 0, 1$; b, α, β — *алгебраические числа, а числа* b *и* $\ln \alpha / \ln \beta$ *иррациональны. Пусть также степень и высота полинома* $Q(x)$ *будут* s *и* H. *Тогда каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *при* $H > H_0$ *будут иметь место неравенства*

$$\begin{gathered} | Q(a^b) | > e^{-\frac{s^3}{\ln^3 s} (s + \ln H) \ln^{2+\varepsilon}(s + \ln H)}, \\ \left| Q\left(\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}\right) \right| > e^{-s^2 (s + \ln H)^{2+\varepsilon}}, \end{gathered} \tag{6}$$

где ε — *постоянная.*

Поступило
16 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Гельфонд, ДАН, 64, № 3 (1949). [2] А. Гельфонд, ДАН, 2, № 3—4 (1935), [3] А. Гельфонд, Изв. АН СССР, № 5—6, 509 (1939).