Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. А. ВАЙНШТЕЙН

О ПОВЫШАЮЩИХ РАЗМЕРНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 V 1949)

1. Мы исследуем замкнутые отображения, при которых происходит повышение размерности, и даем некоторые новые необходимые условия для того, чтобы такое повышение могло происходить.

Для этого приведем некоторые определения (см. ([1])), причем будем предполагать, что все рассматриваемые в дальнейшем пространства являются метрическими пространствами со счетным базисом, а все отображения — непрерывными отображениями, и отображение f пространства X на пространство Y будем обозначать символом $f: X\to Y$.

Рассмотрим отображение $f: X\to Y$.

Как обычно, кратностью точки $y\in Y$ называется мощность множества $f^{-1}(y)$. Множество $L\subset X$, принадлежащее полному прообразу одной точки $y\in Y$, называется п р а в и л ь н ы м м н о ж е с т в о м, если образ любого открытого множества $U\supset L$ содержит y как внутреннюю точку. П о р я д к о м точки $y\in Y$ называется наименьшее целое число k, обладающее тем свойством, что любые k точек, принадлежащие $f^{-1}(y)$, образуют правильное множество. Если такого числа нет, то y имеет б е с к о н е ч н ы й порядок.

Порядок точки $y\in Y$ всегда будем обозначать через $\nu(y)$, а кратность через $\mu(y)$. Если f открыто, то для любой точки $\nu(y)=1$. Если f замкнуто, то всегда $\nu(y)\leqslant\mu(y)$; если f, кроме того, и неприводимо, то всегда $\nu(y)=\mu(y)$.

Положим $Y_k=\{y, \mu(y)\geqslant k\}$, $Y'_k=\{y, \nu(y)\geqslant k\}$, $X_k=f^{-1}(Y_k)$ и $X^1=X\setminus X_2$. Если множество $A\subset X$, то аналогичные множества для частичного отображения $f\mid A$ обозначаются через $Y_k(A)$, $Y'_k(A)$, $X_k(A)$ и $X^1(A)$. Отображение называется н у л ь м е р н ы м, если полный прообраз любой точки нульмерен.

2. Используя теорему Гуревича ([2]), получаем:

Л е м м а 1. *Пусть* $f: X\to Y$ *замкнутое нульмерное отображение и* A — *множество типа* F_σ *в* X. *Тогда для любого* k *из* $\dim Y_k(A)>\dim A$ *следует*: $\dim Y_{k+1}(A)\geqslant\dim Y_k-1$.

Пусть снова $f: X\to Y$ — замкнутое отображение. Рассмотрим счетный базис $\mathfrak{U}=\{U_1,\ldots\}$ пространства X, замкнутый относительно операции объединения конечного числа его элементов. Возьмем произвольную систему $\alpha=\{U_1^\alpha,\ldots,U_{k-1}^\alpha, U_k^\alpha\}$, состоящую из $k\geqslant 2$ элементов базиса $\mathfrak{U}$, обладающих следующими свойствами (мы обозначаем замыкание множества $A\subset B$ в множестве B через $B[A]$, а если B — все пространство X, то просто через $[A]$; пустое множество обозначается через Λ):

свойство a) $[U_i^\alpha]\subset U_k^\alpha$ при $i=1,\ldots,k-1$;
свойство b) $[U_i^\alpha]\cap[U_j^\alpha]=\Lambda$ при $i, j=1,\ldots,k-1$; $i\neq j$.

Положим

$$R_{\alpha}^{!} = f([U_1^{\alpha}]) \cap \ldots \cap f([U_{k-1}^{\alpha}]) \cap [Y \setminus f(U_k^{\alpha})]. \qquad (1)$$

Нетрудно проверить. что в таком случае

$$Y_k' = R^{\alpha}, \qquad (2)$$

где сумма берется по всевозможным системам α с указанными свойствами. Так как систем α лишь счетное множество и все R^{α} замкнуты, то Y_k' есть множество типа F_{σ} в Y. Очевидно, что $Y_1' = Y$. Таким образом, справедлива

Лемма 2. *Пусть f: $X \to Y$ — замкнутое отображение. Тогда Y_k' есть множество типа F_{σ} в Y, причем для $k \geqslant 2$ имеет место представление* (2).

Лемма 3. *Пусть f: $X \to Y$ — произвольное отображение. Тогда* $f([X^1] \cap X_2) \subset Y_2'$.

Лемма 4. *Пусть f: $X \to Y$ — замкнутое нульмерное отображение и U — открытое множество в X. Положим $P = U[X^1(U)]$ и $Q = f(P)$. Тогда, если $\dim Q > \dim P$, то $\dim Y_2'(U) \geqslant \dim Q - 1$.*

Доказательство. Ясно, что $Y_2(P) \subset f(U[X^1(U)] \cap X_2(U))$. Но, в силу леммы 3, $f(U[X^1(U)] \cap X_2(U)) \subset Y_2'(U)$, поэтому $Y_2'(U) \supset Y_2(P)$. Так как P — множество типа F_{σ} в X и $\dim Q > \dim P$, к отображению f: $P \to Q$ можно применить лемму 1 (при $k = 1$). В результате получаем: $\dim Y_2(P) \geqslant \dim Q - 1$ и, следовательно, $\dim Y_2'(U) \geqslant \dim Q - 1$.

3. Переходим к доказательству основных теорем. Мы будем для краткости говорить, что отображение f: $X \to Y$ удовлетворяет условию А, если оно нульмерно и если полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$, если он нигде не плотен в X, содержит хотя бы одну изолированную в ней точку.

Теорема 1. *Пусть f: $X \to Y$ — замкнутое отображение, удовлетворяющее условию* А. *Тогда для любого k из $\dim Y_k' > \dim X$ следует, что $\dim Y_{k+1}' \geqslant \dim Y_k' - 1$.*

Доказательство распадается на две части, соответствующие случаю $k = 1$ (когда нет представления (2)), и случаю $k \geqslant 2$.

1) $k = 1$. Пусть $\dim Y > \dim X$. Нужно показать, что $\dim Y_2' \geqslant \dim Y - 1$. Пусть $\mathfrak{U} = \{U_1, \ldots\}$ — счетный базис пространства X. Положим $P_i = U_i[X^1(U_i)]$ и $Q_i = f(P_i)$. В таком случае

$$Y = N \cup \bigcup_i Q_i,$$

где N — множество (счетное) точек $y \in Y$, полные прообразы которых содержат открытое ядро в X. Действительно, если $y \in Y \setminus N$, то существует точка $x \in f^{-1}(y)$, изолированная в $f^{-1}(y)$. Поэтому найдется окрестность $U_i \in \mathfrak{U}$, для которой $U_i \cap f^{-1}(y) = x$. Тогда $x \in X^1(U) \subset P_i$ и $y \in Q_i$.

Каждое из множеств P_i является множеством типа F_{σ} в X и, следовательно, каждое Q_i есть F_{σ} в Y. Множество N также есть F_{σ} в Y, причем $\dim N = 0$. Поэтому, по теореме сложения, найдется Q_i, для которого $\dim Q_i = \dim Y > \dim X \geqslant \dim P_i$. Применяя лемму 4, получаем $\dim Y_2'(U_i) \geqslant \dim Q_i - 1 = \dim Y - 1$. Но, как легко видеть, из того, что U_i открыто в X, вытекает, что $Y_2'(U_i) \subset Y_2'$. Таким образом. $\dim Y_2' \geqslant \dim Y_2'(U_i) \geqslant \dim Y - 1$.

2) $k \geqslant 2$. Рассмотрим представление (2) для множества Y_k': $Y_k' = \bigcup_{\alpha} R^{\alpha}$. По теореме сложения найдется такое α, что $\dim Y_k' = \dim R^{\alpha}$.

Пусть $\alpha = \{U_1^\alpha, \ldots, U_{k-1}^\alpha, U_k^\alpha\}$. Положим $D = [U_1^\alpha] \cap f^{-1}(R^\alpha)$ и рассмотрим частичное отображение $f \mid D$. Ясно, что $f(D) = R^\alpha$. Множество D замкнуто в X, и поэтому отображение $f \mid D$ замкнуто, кроме того, оно, очевидно, нульмерно. Так как $\dim R^\alpha = \dim Y'_k > \dim X \geqslant \dim D$, то можно применить лемму 1 (при $k = 1$). В этом случае получаем: $\dim Y_2(D) \geqslant \dim R^\alpha - 1 = \dim Y'_k - 1$.

Пусть $y \in Y_2(D)$. Это означает, что найдутся две точки x' и $x'' \in D \cap f^{-1}(y)$ и, кроме того, точки $x_2 \in [U_2^\alpha] \cap f^{-1}(y), \ldots, x_{k-1} \in [U_{k-1}^\alpha] \cap f^{-1}(y)$. Множество $\{x', x'', x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ не является правильным, и поэтому $y \in Y'_{k+1}$. Таким образом, $Y'_{k+1} \supset Y_2(D)$ и, значит, $\dim Y'_{k+1} \geqslant \dim Y'_k - 1$. Теорема доказана.

4. Повторным применением теоремы 1 получаем:

Теорема 2. *Пусть f: $X \to Y$ — замкнутое отображение, удовлетворяющее условию* A, *и* $\dim Y = \dim X + n$. *Тогда для любого $k \leqslant n + 1$ справедливо соотношение*: $\dim Y'_k \geqslant \dim Y - k + 1$.

Отображение f: $X \to Y$ называется отображением конечного порядка, если порядок каждой точки $y \in Y$ конечен. Отображение конечнократно, если конечна кратность каждой точки.

Теорема 3. *Пусть f: $X \to Y$ — замкнутое отображение конечного порядка, удовлетворяющее условию* A, *и* $\dim Y = \dim X + n$. *Тогда порядок $\nu(y)$ принимает по крайней мере $n + 1$ различное значение.*

Если $\nu(y)$ принимает сколь угодно большие значения, то утверждение очевидно. Допустим, что $\nu(y)$ принимает лишь следующие (расположенные в порядке возрастания) значения: $\nu_1, \ldots, \nu_m$, $m < n + 1$. Если $\nu_i < \nu \leqslant \nu_{i+1}$, то ясно, что $Y'_\nu = Y'_{\nu_{i+1}}$. На основании теоремы 1 имеем: $\dim Y'_{\nu_2} \geqslant \dim Y - 1$. Применяя эту теорему m раз, получим: $\dim Y'_{\nu_m} \geqslant \dim Y - m + 1$ и, так как по предположению $\dim Y = \dim X + n$, то $\dim Y'_{\nu_m} \geqslant \dim X + n - m + 1$. Если теперь $m < n + 1$, то $\dim Y'_{\nu_m} > \dim X$, и снова, в силу теоремы 1, получаем: $\dim Y'_{\nu_m + 1} \geqslant \dim Y'_{\nu_m} - 1 \geqslant \dim X$ в противоречии с допущением.

Попутно мы получили обобщение теоремы 2 для случая отображений конечного порядка:

Теорема 4. *Пусть f: $X \to Y$ — замкнутое отображение конечного порядка, удовлетворяющее условию* A, *и* $\dim Y = \dim X + n$. *Тогда, если ν_k есть k-е по величине значение $\nu(y)$ и $k \leqslant n + 1$, то* $\dim Y'_{\nu_k} \geqslant \dim Y - k + 1$.

Как показывает пример А. Н. Колмогорова [3] открытого нульмерного повышающего размерность отображения, в теоремах 1—4 отбросить условие относительно изолированных точек нельзя. То обстоятельство, что для неприводимых отображений порядок совпадает с кратностью, показывает, что без дополнительных предположений усилить эти теоремы также нельзя.

5. Отображение f: $X \to Y$ называется счетнократным, если полный прообраз каждой точки $y \in Y$ не более чем счетен. Счетнократное отображение всегда нульмерно. С другой стороны, граница полного прообраза каждой точки при замкнутом отображении есть компакт [4]. Следовательно, если f замкнуто и $f^{-1}(y)$ нигде не плотен в X, то $f^{-1}(y)$ есть компакт. Так как счетный компакт всегда имеет изолированные точки, то отсюда следует, что счетнократное замкнутое отображение всегда удовлетворяет условию A.

Следствие 1. *Теоремы 1—4 остаются справедливыми, если в них слова: „отображение, удовлетворяющее условию* A*“, заменить словами: „счетнократное отображение“.*

Так как конечнократные отображения всегда имеют конечный порядок, то, в частности, получаем:

Следствие 2. *Пусть* f: $X \to Y$ — *замкнутое конечнократное отображение и* $\dim Y = \dim X + n$. *Тогда порядок* $\nu(y)$ *принимает по крайней мере* $n+1$ *различное значение.*

Следствие 3. *Пусть* f: $X \to Y$ — *замкнутое счетнократное отображение и* $\dim Y = \dim X + n$. *Тогда* $Y'_{n+1} \neq \Lambda$.

В самом деле, если f не является отображением конечного порядка, то утверждение очевидно; если же f имеет конечный порядок, то утверждение вытекает из следствия 1.

Для открытых отображений получаем обобщение известной теоремы П. С. Александрова ([5]):

Следствие 4. *Пусть* $f: X \to Y$ — *замкнутое и открытое счетнократное отображение. Тогда* $\dim Y = \dim X$.

Действительно, нульмерные отображения размерности не понижают ([2]) и, следовательно, $\dim Y \geqslant \dim X$. С другой стороны, так как f открыто, $Y'_2 = \Lambda$, и поэтому из следствия 3 вытекает, что $\dim Y \leqslant \dim X$.

Замечание 1. Легко видеть, что в представлении (2) каждое множество R^α нигде не плотно в Y. Поэтому, если Y — полное пространство, то всегда $Y'_2 \neq Y$, т. е. существуют точки порядка 1. Таким образом, и без предположения, что f — отображение конечного порядка, если f — замкнутое счетнократное повышающее размерность отображение на полное пространство, то порядок принимает 2 различных значения (одно из них — конечное).

Замечание 2. Можно проверить, что замкнутые отображения произвольных пространств можно в теоремах 1—4 заменить произвольными отображениями пространств типа F_σ, а в следствиях 1—4 произвольными отображениями пространств типа F_σ и G_δ одновременно.

Математический институт
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. М. Каждан, ДАН, **67**, № 1 (1949). [2] H. Hurewicz, Journ. f. reine u. ang. Math., **169**, 71 (1932). [3] А. Н. Колмогоров, Ann of. Math., **38**, 36 (1937). [4] И. А. Вайнштейн, ДАН, **57**, 319 (1947). [5] П. С. Александров, ДАН, 4, 283 (1936).