Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С. Х. КОГАН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВДОЛЬ БЕСКОНЕЧНОЙ СПИРАЛИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 7 IV 1949)

Рассмотрим распространение электромагнитных волн вдоль бесконечно длинной спирали. При этом мы не будем ограничиваться уже рассматривавшимся случаем, когда шаг много меньше радиуса спирали.

Зависимость от времени возьмем в виде $e^{-j\omega t}$. Расположим ось z_1 цилиндрической системы координат вдоль оси спирали. Отсчет углов φ_1 будем производить от радиуса-вектора, проведенного от оси спирали через точку пересечения оси провода с плоскостью $z_1=0$. Введем далее криволинейную координату L, отсчитываемую вдоль оси провода. Величины L и z_1 связаны между собой зависимостью

$$L = z_1/\sin\delta, \tag{1}$$

где δ — угол подъема спирали.

Обозначим: r_0 — средний радиус спирали, a_0 — радиус сечения проводника, s — шаг спирали.

Уравнение оси провода в цилиндрической системе координат запишется так:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{s} z_1, \qquad r_1 = r_0. \tag{2}$$

Если провод достаточно тонкий, т. е. выполняются неравенства $a_0/r_0 \ll 1$; $a_0/\lambda \ll 1$, $a_0/s \ll 1$, то при расчете вектор-потенциала можно заменить поверхностное распределение тока линейным, совпадающим с осью провода. При этом вектор-потенциал в точке с координатами z, φ, r запишется так

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(L)\,\frac{e^{jkR}}{R}\,\mathbf{dL}. \tag{3}$$

Здесь $I(L)$ — полный ток в сечении L; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; $R = \sqrt{(z_1 - z)^2 + \rho^2}$; $\rho = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos(\varphi_1 - \varphi)}$.

Для получения основного интегрального уравнения, определяющего закон распределения тока вдоль спирали, используем граничное условие на поверхности провода, проводимость которого будем считать идеальной. В нашем случае это условие имеет вид:

$$E_L = E_z \sin\delta + E_\varphi \cos\delta = 0 \quad \text{(на поверхности провода)}. \tag{4}$$

В дальнейшем будем считать достаточным выполнение этого условия не на всей поверхности провода, а только на образующей спирали, представляющей геометрическое место точек касания спирали с цилиндром радиуса $r = r_0 + a_0$.

Не представляет труда показать, что граничное условие (4) после подстановки в него вместо электрических компонент их значений через потенциал (3) может быть записано в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(z_1)\, f(\,|\, z - z_1 \,|\,)\, dz_1 = 0 \quad (z_1 = L/\sin\delta). \tag{5}$$

Мы не выписываем выражения для ядра, так как оно нам не понадобится. Для дальнейшего важно только знать, что ядро уравнения (5) зависит лишь от модуля разности переменных z и z_1. Последнее, вообще говоря, почти очевидно.

Возможные решения уравнения типа (5) имеют вид

$$I(z_1) = Ie^{jhz_1} \quad (z_1 = L/\sin\delta). \tag{6}$$

Для определения постоянной h проще всего воспользоваться исходным уравнением (4), полностью эквивалентным уравнению (5). При этом вычисление полей по формуле

$$\mathbf{E} = \left(\frac{j}{k}\operatorname{grad}\operatorname{div} + jk\right)\mathbf{A} \tag{7}$$

значительно облегчается тем, что вид функции распределения тока нами уже определен (6).

Используя формулу (3) и разложение

$$\frac{e^{jkR}}{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(w)\, e^{jm(\varphi - \varphi_1)}\, e^{-jw(z_1 - z)}\, dw, \tag{8}$$

где

$$F_m(w) = \begin{cases} \frac{j}{2} J_m(r_0\sqrt{k^2 - w^2}) H_m(r\sqrt{k^2 - w^2}) & \text{при } r > r_0, \\ \frac{j}{2} J_m(r\sqrt{k^2 - w^2}) H_m(r_0\sqrt{k^2 - w^2}) & \text{при } r < r_0, \end{cases}$$

получим (заменяя двойные интегралы при помощи теоремы об интеграле Фурье) составляющие вектора поля

$$E_z = 2jk\frac{I_0}{c}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{hp_m}{k^2}\right) B_m\, e^{jp_m z + jm\varphi}, \tag{9}$$

$$E_\varphi = \frac{jI_0}{c}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[k\operatorname{ctg}\delta\,(B_{m,1} + B_{m,-1}) + 2B_m\frac{mh}{kr}\right] e^{jp_m z + jm\varphi}. \tag{10}$$

Здесь

$$B_{m,n} = \begin{cases} I_{m+n}(r_0 v_m)\, K_{m+n}(r v_m) & \text{при } r > r_0, \\ I_{m+n}(r v_m)\, K_{m+n}(r_0 v_m) & \text{при } r < r_0, \end{cases}$$

$$v_m = \sqrt{\left(h - \frac{2\pi}{s}m\right)^2 - k^2}, \quad p_m = h - \frac{2\pi}{s}m.$$

Остальные составляющие векторов поля мы не выписываем. Подставив выражения (9), (10) в (4) и учитывая, что на образующей провода спирали, где мы требуем выполнения условия (4), $r = r_0 + a_0$ и $\varphi = (2\pi/s)\,z$, получим трансцендентное уравнение

$$-\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (B_{m,1} + B_{m,-1})\, k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2B_m (h^2 - k^2) +$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2B_m (1-\beta)\, \frac{mh}{r_0} \operatorname{ctg} \delta = 0, \tag{11}$$

где $B_{m,n} = I_{m+n}(r_0 v_m)\, K_{m+n}(\beta r v_m)$; $\beta = 1 + a_0/r_0$.

Последним рядом в уравнении (11) можно пренебречь ($\beta - 1 \ll 1$), после чего для нахождения постоянной распространения h остаётся уравнение

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{m,1} + B_{m,-1}\right) \Big/ 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m = \operatorname{tg}^2 \delta \left(\frac{h^2}{k^2} - 1\right). \tag{12}$$

Полученные результаты могут быть интерпретированы следующим образом. Волна тока, бегущая вдоль провода спирали с постоянной распространения $k_n = \sin \delta\, h_n$ (h_n — n-й корень уравнения (12)), возбуждает в окружающем пространстве бесчисленное множество неразделимых электрических и магнитных волн с азимутальной зависимостью, распространяющихся вдоль оси спирали с постоянной распространения

$$p_{m,n} = \frac{k_n}{\sin \delta} - m\,\frac{2\pi}{s}\,. \tag{13}$$

Волна с индексом $m = 0$ симметрична. Все остальные волны несимметричны, что обусловлено периодической структурой спирали.

Введем обозначения

$$F_1(hr_0) = \operatorname{tg}^2 \delta \left[\left(\frac{hr_0}{kr_0}\right)^2 - 1\right],$$

$$F_2(hr_0) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{m,1} + B_{m,-1}\right) \Big/ 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m; \tag{14}$$

тогда уравнение (12) примет вид

$$F_1(hr_0) = F_2(hr_0). \tag{12'}$$

Основная трудность при нахождении корней уравнения (12′) заключается в суммировании рядов, входящих в $F_2(hr_0)$. Существенно отметить, что $F_2(hr_0)$ всюду конечна за исключением двух значений hr_0: $h'r_0 = \operatorname{ctg}\delta + kr_0$ и $h''r_0 = \operatorname{ctg}\delta - kr_0$. $F_2(hr_0)$ вещественна лишь в определенных интервалах, определяемых условием:

$$|\, hr_0 + m \operatorname{ctg} \delta \,| > kr_0, \tag{15}$$

которое должно выполняться для любого m.

На рис. 1, *а* и *б* приведены два примерных построения графического решения уравнения (12′) для вещественных корней. Как видно из рис. 1, *а*, решение дает 3 корня: h_1 — появляющийся в результате пересечения кривой для $F_1(hr_0)$ с пологой частью кривой $F_2(hr_0)$, h_2 и h_3 — появляющиеся в результате пересечения кривой $F_1(hr_0)$ с двумя ветвями кривой $F_2(hr_0)$, уходящими в бесконечность. Начиная с некоторой частоты, которую мы назовем первой критической частотой спирали, может существовать только один корень h_3 (рис. 2).

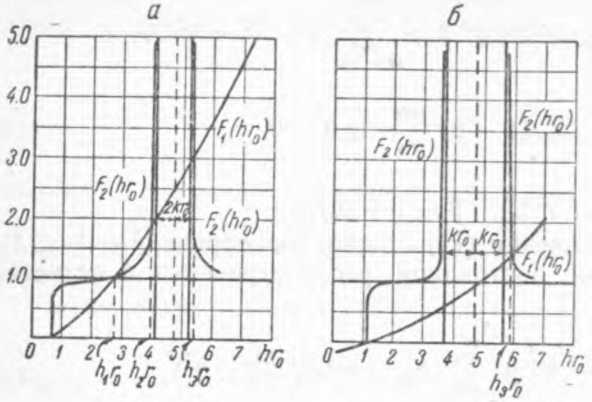

Рис. 1. Кривые функций $F_1(hr_0)$ и $F_2(hr_0)$: *а* — при $kr_0 = 0{,}6$, *б* — при $kr_0 = 1$

Значение $k_{кр_1} = \omega_{кр_1}/c$ может быть вычислено по формуле, являющейся точной в предельном случае $a_0 \to 0$ и дающей хорошее приближение для тонких проводов:

$$k_{кр_1} \cong \frac{\cos\delta}{(1+\sin\delta)\, r_0}. \qquad (16)$$

Дискретные области частот, в которых отсутствуют вещественные корни, определяются также условием (15).

При $k > \operatorname{ctg}\delta/2r_0$ вещественные корни отсутствуют. Частоту, соответствующую этому значению $k = \omega/c$, будем называть второй критической частотой спирали. В соответствии с возможным существованием 3 решений полный ток в проводе может быть записан в виде

$$I = \sum_{n=1}^{3} I_n e^{jk_n L}. \qquad (17)$$

Соотношение амплитуд тока должно определиться из условий возбуждения.

Для проверки правильности полученных результатов был проведен расчет конкретной спирали со следующими данными: $2r_0 = 22{,}5$ см, $s = 15$ см, $\delta = 12°$, $2a_0 = 1{,}125$ см. Результаты расчета приведены на рис. 2 в виде кривой $\tau = f(kr_0)$, характеризующей коэффициент замедления $\tau = k/k_n$ волны вдоль провода в зависимости от частоты. Там же нанесены данные экспериментальных измерений ([1]). Совпадение расчета с экспериментальными данными вполне удовлетворительное. Значение $k_{кр_1} r_0$, согласно измерениям, находится в промежутке между $kr_0 = 0{,}705$ и $kr_0 = 0{,}76$. По расчету $k_{кр_1} r_0 = 0{,}74$, а по приближенной формуле (16) $k_{кр_1} r_0 = 0{,}805$. Из эксперимента видно, что при переходе через критическую частоту происходит скачок коэффициента замедления от $\tau_1 = 1$ до $\tau_{3кр} = 0{,}66$, подтверждающий наличие вещественных корней только в дискретных областях значений h. По расчету $\tau_{3кр} = 0{,}68$.

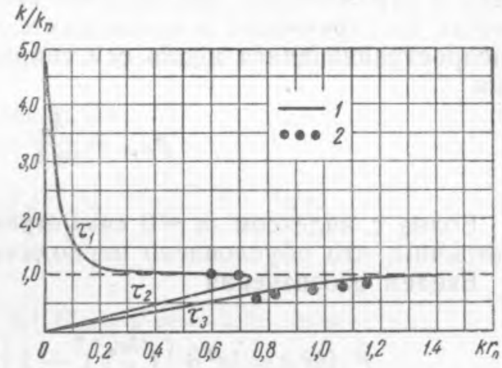

Рис. 2. Коэффициент замедления τ в зависимости от kr_0: *1* — расчетная кривая, *2* — экспериментальные точки

Автор выражает благодарность за руководство и интерес, проявленный к настоящей работе, проф. Я. Н. Фельду и Л. А. Вайнштейну.

Поступило
5 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Kraus and J. Williamson, J. Appl. Phys., 19, 1, 87 (1948).