Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. В. КИСУНЬКО

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ КРАЕВЫХ (ДИФРАКЦИОННЫХ) ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 11 IV 1949)

1. Как известно, возможности получения расчетных результатов, относящихся к основным краевым задачам электродинамики, в настоящее время в значительной степени ограничиваются особыми трудностями решения интегральных, интегро-дифференциальных или эквивалентных им матричных уравнений, к которым в конечном счете приводятся соответствующие краевые задачи. Это обстоятельство придает особый практический интерес вариационным формулировкам краевых задач, открывающим возможность приближенного решения этих задач. В электродинамике полых систем целесообразность применения вариационных методов апроксимации оправдывается также и тем, что здесь наиболее интересные с практической точки зрения величины (коэффициенты отражения, характеристические частоты и т. п.) обычно являются функционалами искомых электродинамических функций и поэтому могут быть с достаточной для практики точностью вычислены даже в том случае, когда искомые функции апроксимированы другими надлежащим образом выбранными функциями, в определенном интегральном смысле мало уклоняющимися от истинных функций. В связи с этим, естественно, прежде всего возникает вопрос о том, какому математическому принципу должны быть подчинены апроксимирующие функции (стационарность или обращение в нуль некоторого функционала, вид этого функционала и т. п.).

В настоящей работе формулируются общие вариационные принципы, по отношению к которым интегральные уравнения краевых задач электродинамики играют такую же роль, как дифференциальные уравнения Эйлера (см., например, [1]) по отношению к более простым вариационным задачам.

2. Пусть требуется найти комплексные амплитуды **E** и **H** напряженностей электромагнитного поля, изменяющегося во времени по закону $e^{-i\omega t}$, возбуждаемого заданными сторонними токами **j** в объеме V, ограниченном идеально проводящей поверхностью полностью или частично (в последнем случае объем V будет заключен между поверхностями, охватывающими возможные идеальные проводники, и бесконечно удаленной поверхностью, где искомое поле должно удовлетворять условию излучения). При этом предполагается, что, кроме границ объема V, заданы диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость и электропроводность как кусочно-непрерывные функции радиуса-вектора **r** точки наблюдения. Топологические свойства объема V выражаются требованием, чтобы любые две точки этого объема могли быть соединены друг с другом линией, все точки которой принадлежали бы этому же объему.

Разделим объем V некоторой условной границей („апертурой") S на две области $V_{1,2}$, обозначим касательные составляющие искомых напряженностей электрического и магнитного полей на S, соответственно, через $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ и, следуя обычным приемам [2, 3], сформулируем сначала поставленную задачу электродинамики как задачу об определении одной из апертурных функций $\mathscr{E}$ или $\mathscr{H}$.

а) Если бы $\mathscr{E}$ была известна, то напряженности поля в объемах $V_1(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ и $V_2(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ можно было бы, на основании принципа суперпозиции, написать в следующем виде (значки $_{1,2}$ в дальнейшем везде означают номера объемов и должны читаться альтернативно: либо только $_1$ либо только $_2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,2} &= \mathbf{E}^e_{1,2}\{\mathbf{j}_{1,2}, \mathscr{E}\} = \mathbf{E}^e_{1,2}\{\mathbf{j}_{1,2}, 0\} + \mathbf{E}^e_{1,2}\{0, \mathscr{E}\}, \\ \mathbf{H}_{1,2} &= \mathbf{H}^e_{1,2}\{\mathbf{j}_{1,2}, \mathscr{E}\} = \mathbf{H}^e_{1,2}\{\mathbf{j}_{1,2}, 0\} + \mathbf{H}^e_{1,2}\{0, \mathscr{E}\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}^e_{1,2}$ и $\mathbf{H}^e_{1,2}$ — линейные относительно стоящих в фигурных скобках функциональных аргументов операторы, зависящие только от физико-геометрической структуры объемов $V_{1,2}$, а $\mathbf{j}_{1,2}$ — сторонние токи в объемах $V_{1,2}$.

Так как, по определению, касательные составляющие $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ на S одинаковы и равны $\mathscr{E}$, то для того, чтобы поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ на границе S аналитически продолжали друг друга, остается потребовать непрерывности и для касательных составляющих $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ на апертуре, т. е.

$$[\mathbf{H}_1\mathbf{n}_1] + [\mathbf{H}_2\mathbf{n}_2] = 0 \tag{2}$$

($\mathbf{n}_{1,2}$ — нормали к S, направленные в сторону $V_{1,2}$).

Поставим сюда $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ из (1); тогда

$$-\mathbf{J}^e_0 + \mathbf{J}^e_1\{\mathscr{E}\} + \mathbf{J}^e_2\{\mathscr{E}\} = 0. \tag{3}$$

Здесь

$$\mathbf{J}^e_0 = [\mathbf{n}_1\mathbf{H}^e_1\{\mathbf{j}_1, 0\}] + [\mathbf{n}_2\mathbf{H}^e_2\{\mathbf{j}_2, 0\}] \tag{4}$$

есть, очевидно, не зависящая от $\mathscr{E}$ поверхностная плотность суммарного тока, который существовал бы на S, если бы эта поверхность была идеально проводящей, а $\mathbf{J}^e_1$ и $\mathbf{J}^e_2$ — линейные однородные операторы магнитных импедансов поверхности S по отношению к объемам V_1 и V_2, определяемые соотношениями:

$$\mathbf{J}^e_{1,2}\{\mathscr{E}\} = [\mathbf{H}^e_{1,2}\{0, \mathscr{E}\}\,\mathbf{n}_{1,2}]. \tag{5}$$

б) Совершенно аналогично (1) можно выразить также $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ через $\mathbf{j}_{1,2}$ и $\mathscr{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,2} &= \mathbf{E}^h_{1,2}\{\mathbf{j}_{1,2}, \mathscr{H}\} = \mathbf{E}^h_{1,2}\{\mathbf{j}_{1,2}, 0\} + \mathbf{E}^h_{1,2}\{0, \mathscr{H}\}, \\ \mathbf{H}_{1,2} &= \mathbf{H}^h_{1,2}\{\mathbf{j}_{1,2}, \mathscr{H}\} = \mathbf{H}^h_{1,2}\{\mathbf{j}_{1,2}, 0\} + \mathbf{H}^h_{1,2}\{0, \mathscr{H}\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathbf{E}^h_{1,2}$ и $\mathbf{H}^h_{1,2}$ — новые линейные операторы. Далее, аналогично (2), можно потребовать непрерывности на S касательных составляющих напряженности электрического поля:

$$[\mathbf{n}_1\mathbf{E}_1] + [\mathbf{n}_2\mathbf{E}_2] = 0, \tag{7}$$

или, учитывая (6),

$$-\mathbf{J}^h_0 + \mathbf{J}^h_1\{\mathscr{H}\} + \mathbf{J}^h_2\{\mathscr{H}\} = 0, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{J}^h_0 = [\mathbf{E}^h_1\{\mathbf{j}_1, 0\}\,\mathbf{n}_1] + [\mathbf{E}^h_2\{\mathbf{j}_2, 0\}\,\mathbf{n}_2] \tag{9}$$

не зависит от $\mathscr{H}$, а $\mathbf{J}_1^h$ и $\mathbf{J}_2^h$ — линейные однородные операторы электрических импедансов поверхности S по отношению к объемам V_1 и V_2, причем

$$\mathbf{J}_{1,\,2}^h\{\mathscr{H}\} = [\mathbf{n}_{1,\,2}\mathbf{E}_{1,\,2}^h\{0,\,\mathscr{H}\}]. \tag{10}$$

3. Уравнения (3) и (8), к которым оказалось приведенной электродинамическая задача, по существу хорошо известны, и наша задача сейчас состоит в формулировке вариационных принципов для этих уравнений. Составим функционалы:

$$K^e\{\mathscr{E}\} = \int\limits_S (\mathscr{E}, -2\mathbf{J}_0^e + \mathbf{J}_1^e\{\mathscr{E}\} + \mathbf{J}_2^e\{\mathscr{E}\})\,dS, \tag{11}$$

$$K^h\{\mathscr{H}\} = \int\limits_S (\mathscr{H}, -2\mathbf{J}_0^h + \mathbf{J}_1^h\{\mathscr{H}\} + \mathbf{J}_2^h\{\mathscr{H}\})\,dS \tag{12}$$

и вычислим их первые вариации, считая, что варьируются только апертурные функции $\mathscr{E}$ или $\mathscr{H}$, а поверхность S, операторы импедансов и величины $\mathbf{J}_0^{e,\,h}$ не варьируются. Тогда для обоих функционалов (для краткости опуская индексы ${}^{e,\,h}$ и обозначая функциональные аргументы через $\mathbf{A}$) получим:

$$\delta K\{\mathbf{A}\} = \int\limits_S (\delta\mathbf{A}, -2\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_1\{\mathbf{A}\} + \mathbf{J}_2\{\mathbf{A}\})\,dS + \\ + \int\limits_S (\mathbf{A}, \mathbf{J}_1\{\delta\mathbf{A}\} + \mathbf{J}_2\{\sigma\mathbf{A}\})\,dS. \tag{13}$$

Воспользуемся теперь теоремой взаимности, выражающей в наших обозначениях интегральную коммутативность операторов импедансов $\mathbf{J}_{1,\,2}$ по отношению к любым апертурным (касательным) векторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\int\limits_S (\mathbf{A}, \mathbf{J}_{1,\,2}\{\mathbf{B}\})\,dS = \int\limits_S (\mathbf{B}, \mathbf{J}_{1,\,2}\{\mathbf{A}\})\,dS. \tag{14}$$

Тогда, после перестановки $\mathbf{A}$ и $\delta\mathbf{A}$ во вторых интегралах (13), получим:

$$\delta K^e\{\mathscr{E}\} = 2\int\limits_S (\delta\mathscr{E}, -\mathbf{J}_0^e + \mathbf{J}_1^e\{\mathscr{E}\}) + \mathbf{J}_2^e\{\mathscr{E}\})\,dS, \tag{15}$$

$$\delta K^h\{\mathscr{H}\} = 2\int\limits_S (\delta\mathscr{H}, -\mathbf{J}_0^h + \mathbf{J}_1^h\{\mathscr{H}\} + \mathbf{J}_2^h\{\mathscr{H}\})\,dS. \tag{16}$$

Отсюда видно, что при произвольных $\delta\mathscr{E}$ или $\delta\mathscr{H}$ уравнения (3) и (8) могут быть совершенно строго заменены требованием стационарности соответствующих функционалов, т. е. вариационными условиями:

$$\begin{aligned} &\delta K^e\{\mathscr{E}\} = 0 \qquad (а); \\ &\delta K^h\{\mathscr{H}\} = 0 \qquad (б). \end{aligned} \tag{17}$$

4. Условиями (17), очевидно, можно воспользоваться и для приближенного решения соответствующих задач. Например, следуя методу Ритца ([1]), можно апроксимировать $\mathscr{E}$ или $\mathscr{H}$ функциями, общий ход которых на S в наиболее существенных чертах совпадает с иско-

мыми функциями, и ввести в апроксимирующие функции произвольные параметры $a_1, a_2, a_3, \ldots$, которыми в пределах сделанных допущений можно варьировать вид этих функций. Тогда соответствующий функционал $K^{e,h}$ окажется функцией $a_1, a_2, a_3, \ldots$, а условие (17) для этого функционала представится системой уравнений $\partial K / \partial a_i = 0$, определяющих варьируемые параметры. Эти уравнения, очевидно, будут играть роль приближенных граничных условий, заменяющих точные условия (3) или (8) и требующих непрерывности касательных составляющих поля на S в некотором интегральном (усредненном) смысле.

Пусть, например, апроксимирующие функции заданы в виде $\mathscr{E} = a_1 \mathbf{F}^e(\mathbf{r}, a_2, a_3, \ldots)$, либо $\mathscr{H} = a_1 \mathbf{F}^h(\mathbf{r}, a_2, a_3, \ldots)$, т. е. один из варьируемых параметров (a_1) играет роль нормирующего множителя при функциях известного вида. Тогда функционалы (11) и (12) можно написать так:

$$\left.\begin{matrix} K^e\{\mathscr{E}\} \\ K^h\{\mathscr{H}\} \end{matrix}\right\} = -2a_1 \int\limits_S (\mathbf{F}^{e,h} \mathbf{J}_0^{e,h})\, dS + a_1^2 \int\limits_S (\mathbf{F}^{e,h} \mathbf{J}_1^{e,h} \{\mathbf{F}^{e,h}\} + \mathbf{F}^{e,h} \mathbf{J}_2^{e,h} \{\mathbf{F}^{e,h}\})\, dS, \tag{18}$$

так что условия $\partial K^{e,h} / \partial a_1 = 0$ будут иметь вид линейных относительно a_1 алгебраических уравнений:

$$-\int\limits_S (\mathbf{F}^e \mathbf{J}_0^e)\, dS + a_1 \int\limits_S (\mathbf{F}^e \mathbf{J}_1^e \{\mathbf{F}^e\} + \mathbf{F}^e \mathbf{J}_2^e \{\mathbf{F}^e\})\, dS = 0, \qquad (a)$$

$$-\int\limits_S (\mathbf{F}^h \mathbf{J}_0^h)\, dS + a_1 \int\limits_S (\mathbf{F}^h \mathbf{J}_1^h \{\mathbf{F}^h\} + \mathbf{F}^h \mathbf{J}_2^h \{\mathbf{F}^h\})\, dS = 0. \qquad (б) \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что после умножения на a_1 последних два уравнения могут быть написаны в виде:

$$\int\limits_S (\mathscr{E}, -\mathbf{J}_0^e + \mathbf{J}_1^e \{\mathscr{E}\} + \mathbf{J}_2^e \{\mathscr{E}\})\, dS = 0;$$

$$\int\limits_S (\mathscr{H}, -\mathbf{J}_0^h + \mathbf{J}_1^h \{\mathscr{H}\} + \mathbf{J}_2^h \{\mathscr{H}\})\, dS = 0. \tag{20}$$

Таким образом, вариационное условие для нормирующего множителя оказалось эквивалентным требованию обращения в нуль усредненных на апертуре скачков касательных составляющих $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$, причем скачки составляющих одного вектора усредняются с весом, пропорциональным значению составляющих другого (непрерывного) вектора (ср. ([4])).

Следует также заметить, что в прикладной электродинамике вариационные принципы могут найти и более регулярные применения при формулировке приближенных методов, в известном смысле аналогичных методу Хартри—Фока в квантовой механике.

Поступило
19 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, I, гл. IV, М. — Л., 1933. [2] М. П. Свешникова, ЖРФХО, 59, 453 (1927). [3] Я. Н. Фельд, ЖТФ, 13, 110 (1943). [4] Г. В. Кисунько, Радиотехника, 3, № 5, 24 (1948).