Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

МЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ИНВАРИАНТНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНТАКТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 7 IV 1949)

Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений очень часто можно базировать на алгорифмах тех групп преобразований, по отношению к которым структурные свойства систем инвариантны.

Примером могут служить кинетические уравнения ранга большего нуля:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r} K_\rho \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{q}_\nu}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r} K_\rho \frac{\partial L_\rho}{\partial q_\nu}, \quad \nu = \overline{1, n}; \tag{1}$$

если главный кинетический потенциал $L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ и дополнительные $L_\rho(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ инвариантны относительно группы С. Ли с инфинитезимальным оператором

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \frac{\partial}{\partial q_\nu}, \tag{2}$$

то система уравнений (1) допускает интеграл:

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r} K_\rho \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{q}_\nu}\right) = C. \tag{3}$$

Другим примером могут служить уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_\nu - \frac{\partial H}{\partial p_\nu} = 0, \quad \dot{p}_\nu + \frac{\partial H}{\partial q_\nu} = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{*}$$

структура которых инвариантна относительно контактных преобразований. Это свойство лежит в основе известного метода интегрирования систем (*).

Канонические системы ранга большего нуля:

$$\dot{q}_\nu - \frac{\partial H}{\partial p_\nu} = \sum_{\rho=1}^{r} K_\rho \frac{\partial H_\rho}{\partial p_\rho}, \quad \dot{p}_\nu + \frac{\partial H}{\partial q_\nu} = -\sum_{\rho=1}^{r} K_\rho \frac{\partial H_\rho}{\partial q_\nu}, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{**}$$

также инвариантны относительно контактных преобразований, как это было показано автором [1].

Более общие системы:

$$dq_\nu = \sum_{\pi=1}^{p} dt_\pi \left(\frac{\partial H_\pi}{\partial p_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r_\pi} K_{\rho\pi} \frac{\partial H_{\rho\pi}}{\partial p_\nu} \right),$$

$$\nu = \overline{1, n} \qquad (***)$$

$$dp_\nu = -\sum_{\pi=1}^{p} dt_\pi \left(\frac{\partial H_\pi}{\partial q_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r_\pi} K_{\rho\pi} \frac{\partial H_{\rho\pi}}{\partial q_\nu} \right),$$

как было нами показано ([2]), подобно системам (*) и (**), не изменяют структуры при контактных преобразованиях.

Целью настоящего сообщения является явное представление обширного класса уравнений в дифференциалах, инвариантных по структуре относительно группы контактных преобразований.

Условимся не писать знака суммы, если индекс суммирования встречается дважды (отмечая лишь пределы суммирования), и, кроме того, будем пользоваться следующим сокращением записи:

$$\iint_{D_k} \cdots \int F(\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(k)})\, d\vartheta^{(1)} \cdots d\vartheta^{(k)} \equiv \int_{D_k} F(\vartheta)\, \Delta\vartheta.$$

Теорема. *Пусть функции*

$$\begin{gathered} H_\pi, K_{\pi\rho}, H_{\pi\rho}, \quad \pi = \overline{1, p}, \quad \rho = \overline{1, r_\pi}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H'_\pi, K'_{\pi\rho'}, H'_{\pi\rho'}, \quad \pi = \overline{1, p}, \quad \rho' = \overline{1, r'_\pi} \end{gathered} \qquad (4)$$

зависят от переменных

$$t_\pi;\ q_\nu, p_\nu; \ldots; q_{\nu'}', p_{\nu'}'; \quad \pi = \overline{1, p};\ \nu = \overline{1, n}; \ldots, \nu' = \overline{1, n'}, \qquad (5)$$

а функции

$$\begin{gathered} F_{\pi\sigma}, G_{\pi\sigma}, \quad \pi = \overline{1, p}, \quad \sigma = \overline{1, s_\pi}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F'_{\pi\sigma'}, G'_{\pi\sigma'}, \quad \pi = \overline{1, p}, \quad \sigma' = \overline{1, s'_\pi}, \end{gathered} \qquad (6)$$

кроме переменных ряда (5), *зависят от параметров*

$$\vartheta_{\pi\sigma}^{(\alpha)}, \ldots, \vartheta_{\pi\sigma'}^{\prime(\alpha')}; \quad \alpha = \overline{1, a_{\pi\sigma}}, \ldots, \alpha' = \overline{1, a'_{\pi\sigma'}}, \qquad (7)$$

изменяющихся в некоторых областях

$$D_{\pi\sigma}, \ldots, D'_{\pi\sigma'}, \qquad (8)$$

в общем случае зависящих от переменных ряда (5).

Система дифференциальных уравнений:

$$dp_\nu + dt_\pi \left(\frac{\partial H_\pi}{\partial q_\nu} + K_{\pi\rho} \frac{\partial H_{\pi\rho}}{\partial q_\nu} + \int_{D_{\pi\sigma}} F_{\pi\sigma} \frac{\partial G_{\pi\sigma}}{\partial q_\nu} \Delta\vartheta_{\pi\sigma} \right) = 0,$$

$$dq_\nu - dt_\pi \left(\frac{\partial H_\pi}{\partial p_\nu} + K_{\pi\rho} \frac{\partial H_{\pi\rho}}{\partial p_\nu} + \int_{D_{\pi\sigma}} F_{\pi\sigma} \frac{\partial G_{\pi\sigma}}{\partial p_\nu} \Delta\vartheta_{\pi\sigma} \right) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (A)$$

$$dp_{\nu'}' + dt_\pi \left(\frac{\partial H'_\pi}{\partial q'_{\nu'}} + K'_{\pi\rho'} \frac{\partial H_{\pi\rho'}'}{\partial q_{\nu'}'} + \int\limits_{D_{\pi\sigma'}} F'_{\pi\sigma'} \frac{\partial G_{\pi\sigma'}'}{\partial q_{\nu'}'} \Delta\vartheta'_{\pi\sigma'} \right) = 0,$$

$$dq'_{\nu'} - dt_\pi \left(\frac{\partial H_\pi'}{\partial p_{\nu'}'} + K'_{\pi\rho'} \frac{\partial H_{\pi\rho'}'}{dp_{\nu'}'} + \int\limits_{D_{\pi\sigma'}} F'_{\pi\rho'} \frac{\partial G_{\pi\sigma'}'}{\partial p_{\nu'}'} \Delta\vartheta'_{\pi\sigma'} \right) = 0,$$

$$\nu = \overline{1, n}; \ldots ; \nu' = \overline{1, n'}$$

$$(\pi = \overline{1, p};\ \rho = \overline{1, r_\pi}; \ldots ; \rho' = \overline{1, r'_\pi};\ \sigma = \overline{1, s_\pi}; \ldots ;\ \sigma' = \overline{1, s'_\pi})$$

в результате разделенных контактных преобразований:

$$\left.\begin{aligned}
&W = W(t_\pi;\ q_\nu, \xi_\nu), \qquad W_\mu(t_\pi;\ q_\nu, \xi_\nu) = 0, \quad \mu = \overline{1, m}, \\
&p_\nu = \frac{\partial W}{\partial q_\nu} + \Lambda_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial q_\nu}, \quad -\eta_\nu = \frac{\partial W}{\partial \xi_\nu} + \Lambda_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial \xi_\nu}, \quad \mu = \overline{1, m}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&W' = W'(t_\pi;\ q'_{\nu'}, \xi'_{\nu'}), \qquad W'_{\mu'}(t_\pi;\ q_{\nu'}'\ \xi'_{\nu'}) = 0, \quad \mu' = \overline{1, m'}, \\
&p'_{\nu'} = \frac{\partial W'}{\partial q_{\nu'}'} + \Lambda'_{\mu'} \frac{\partial W_{\mu'}'}{\partial q_{\nu'}'}, \quad -\eta'_{\nu'} = \frac{\partial W'}{\partial \xi_{\nu'}'} + \Lambda'_{\mu'} \frac{\partial W_{\mu'}'}{\partial \xi'_{\nu'}}, \quad \mu' = \overline{1, m'}
\end{aligned}\right\} \qquad (Б)$$

переходит в систему той же структуры:

$$\left.\begin{aligned}
&d\eta_\nu + dt_\pi \left(\frac{\partial \tilde{H}_\pi}{\partial \xi_\nu} + \tilde{K}_{\pi\rho} \frac{\partial \tilde{H}_{\pi\rho}}{\partial \xi_\nu} + \int\limits_{\tilde{D}_{\pi\sigma}} \tilde{F}_{\pi\sigma} \frac{\partial \tilde{G}_{\pi\sigma}}{\partial \xi_\nu} \Delta\vartheta_{\pi\sigma} \right) = 0, \\
&d\xi_\nu - dt_\pi \left(\frac{\partial \tilde{H}_\pi}{\partial \eta_\nu} + \tilde{K}_{\pi\rho} \frac{\partial \tilde{H}_{\pi\rho}}{\partial \eta_\nu} + \int\limits_{\tilde{D}_{\pi\sigma}} \tilde{F}_{\pi\sigma} \frac{\partial \tilde{G}_{\pi\sigma}}{\partial \eta_\nu} \Delta\vartheta_{\pi\sigma} \right) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&d\eta_{\nu'}' + dt_\pi \left(\frac{\partial \tilde{H}_\pi'}{\partial \xi_{\nu'}'} + \tilde{K}'_{\pi\rho'} \frac{\partial \tilde{H}'_{\pi\rho'}}{\partial \xi'_{\nu'}} + \int\limits_{\tilde{D}'_{\pi\sigma'}} \tilde{F}'_{\pi\sigma'} \frac{\partial \tilde{G}'_{\pi\sigma'}}{\partial \xi_{\nu'}'} \Delta\vartheta_{\pi\sigma'} \right) = 0, \\
&d\xi_{\nu'}' - dt_\pi \left(\frac{\partial \tilde{H}'_\pi}{\partial \eta_{\nu'}'} + \tilde{K}'_{\pi\rho'} \frac{\partial \tilde{H}'_{\pi\sigma'}}{\partial \eta'_{\nu'}} + \int\limits_{\tilde{D}'_{\pi\sigma'}} \tilde{F}'_{\pi\sigma'} \frac{\partial \tilde{G}'_{\pi\sigma'}}{\partial \eta'_{\nu'}} \Delta\vartheta_{\pi\sigma'} \right) = 0, \\
&\nu = \overline{1, n}; \ldots ; \nu' = \overline{1, n'} \\
&(\pi = \overline{1, p};\ \rho = \overline{1, r_\pi}; \ldots ; \rho' = \overline{1, r'_\pi};\ \sigma = \overline{1, s_\pi}; \ldots ;\ \sigma' = \overline{1, s'_\pi}),
\end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{А})$$

причем

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{H}_\pi = H_\pi + \frac{\partial W}{\partial t_\pi} + \Lambda_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial t_\pi}, \quad \pi = \overline{1, p} \quad (\mu = \overline{1, m}); \\
&\tilde{H}_{\pi\rho} = H_{\pi\rho}, \quad \tilde{K}_{\pi\rho} = K_{\pi\rho}, \quad \rho = \overline{1, r_\pi}, \\
&\tilde{F}_{\pi\sigma} = F_{\pi\sigma}, \quad \tilde{G}_{\pi\sigma} = G_{\pi\sigma}, \quad \sigma = \overline{1, s_\pi}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\tilde{H}'_\pi = H'_\pi + \frac{\partial W'}{\partial t_\pi} + \Lambda'_{\mu'} \frac{\partial W'_{\mu'}}{\partial t_\pi}, \quad \pi = \overline{1, p} \quad (\mu' = \overline{1, m'}), \\
&\tilde{H}'_{\pi\rho'} = H'_{\pi\rho'}, \quad \tilde{K}'_{\pi\rho'} = K'_{\pi\rho'}, \quad \rho' = \overline{1, r'_\pi}, \\
&\tilde{F}_{\pi\sigma'} = F'_{\pi\sigma'}, \quad \tilde{G}'_{\pi\sigma'} = G'_{\pi\sigma'}, \quad \sigma' = \overline{1, s'_\pi},
\end{aligned}\right\} \qquad (В)$$

а области интегрирования

$$\breve{D}_{\pi\sigma}, \ldots, \breve{D}_{\pi\sigma'}', \quad \pi = \overline{1, p}; \quad \sigma = \overline{1, s_\pi}; \ldots; \sigma' = \overline{1, s_\pi'},$$

суть преобразованные области (8).

Для доказательства достаточно вычислить левые части уравнений ($\breve{A}$) с помощью формул преобразования (Б) и уравнений (А).

Поступило
7 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, Тр. ИММ АН Уз.ССР, в. 5 (1949). [2] И. С. Аржаных, Доклады АН Уз.ССР, № 11 (1948).