Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

КОЛЬЦА ТИПА C

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 IV 1949)

В анализе имеется большое число нормированных колец функций, в которых норма каждого элемента $x(t)$ задается как верхняя грань значений некоторой неотрицательной величины $\| x(t) \|_s$, характеризующей поведение функции $x(t)$ в окрестности точки s. Так, например, в кольце C всех непрерывных функций на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ роль величины $\| x(t) \|_s$ играет $| x(s) |$, в кольце D_n всех функций $x(t)$ с n непрерывными производными — величина $\sum\limits_{k=0}^{n} | x^{(k)}(s) |$.

Работа посвящена изучению этого класса колец функций с общей точки зрения.

Определение 1. Пусть R — регулярное ([1], стр. 11) нормированное кольцо функций $x(t)$, рассматриваемых на множестве $\mathfrak{M}(R)$ всех своих максимальных идеалов. **Нормой функции** $x(t) \in R$ **в точке** $t = s$ называется точная нижняя граница норм функций $y(t) \in R$, совпадающих с $x(t)$ в окрестности точки s ([1], стр. 62); будем обозначать эту величину через $\| x(t) \|_s$.

Определение 2. Кольцо R называется **кольцом типа** C, если норма в R определена формулой

$$\| x(t) \| = \sup_s \| x(t) \|_s \tag{1}$$

или топологически эквивалентной ([1], стр. 63).

Каждое кольцо типа C можно воспроизвести из примарных колец (колец с одним единственным максимальным идеалом), используя конструкцию, идея которой восходит к И. М. Гельфанду. Именно, пусть S — тихоновское произведение некоторого множества $\Phi = \{\alpha\}$ комплексных кругов $| t_\alpha | \leqslant b_\alpha$; каждая точка $t \in S$ определяется совокупностью координат $\{t_\alpha\}$. Пусть каждой точке t некоторого замкнутого подмножества $F \subset S$ поставлено в соответствие примарное кольцо K_t и в единственном максимальном идеале кольца K_t указана система $\{X_{t\alpha}\}$ элементов, равномощная с Φ. Норму элемента $Z \in K_t$ обозначим через $\| Z \|_t$. Рассмотрим совокупность $\sum$ всех ограниченных по норме абстрактных функций $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, значения которых для каждого $t \in F$ принадлежат к соответствующему K_t; эта совокупность естественно организуется в полное нормированное кольцо, которое называется (дискретной) **прямой суммой колец** K_t **по множеству** F.

Построим внутри кольца $\sum$ подкольцо с множеством Φ образующих, полагая для полинома $P(t_\alpha, t_\beta, \ldots, t_\omega)$ $(\alpha, \beta, \ldots, \omega \in \Phi)$, по определению,

$$\| P(t_\alpha, t_\beta, \ldots, t_\omega) \| = \sup_{t \in F} \| P(X_{t\alpha} + t_\alpha, X_{t\beta} + t_\beta, \ldots, X_{t\omega} + t_\omega \|_t \quad (2)$$

и произведя по этой норме пополнение. Полученное кольцо будем называть непрерывной прямой суммой колец K_t (первого рода) по множеству F и обозначим через $\sum'_F K_t$.

Например, если $F = S = \{a \leqslant t \leqslant b\}$, $K_t = \{a_0 + a_1 X\}$ с $X^2 = 0$ и $\| a_0 + a_1 X \| = | a_0 | + | a_1 |$, а $X_{t\alpha} \equiv X$, то по формуле (2) $\| P(t) \| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \| P(X + t) \|_t = \sup_t \| P(t) + XP'(t) \|_t = \sup_t \{ | P(t) | + | P'(t) | \}$ и $\sum_F K_t$ совпадает с кольцом D_1. Заметим, что использованное здесь кольцо $K = \{a_0 + a_1 X\}$ есть кольцо вычетов D_1 по идеалу $J(s)$, образованному из всех функций $x(t) \in D_1$, обращающихся в точке $t = s$ в нуль вместе со своей производной.

В общем случае каждый максимальный идеал M_s регулярного кольца R без радикала обладает, как известно ([1], стр. 40), наименьшим замкнутым примарным идеалом $J(s)$; кольцо вычетов $R / J(s)$ примарно. Пусть R — кольцо типа C и $\{t_\alpha\}$ — система всех его образующих; пусть, далее, $b_\alpha \geqslant \max | t_\alpha(M) |$, S — тихоновское произведение кругов $| t_\alpha | \leqslant b_\alpha$, $F \subset S$ — пространство максимальных идеалов кольца R. Положим $K_s = R / J(s)$ и обозначим через $X_{s\alpha}$ образ в $R / J(s)$ элемента $t_\alpha - s_\alpha \in R$. Имеет место следующее предложение:

Теорема 1.

$$R = \sum'_F R / J(s).$$

Естественно возникает вопрос, дает ли в общем случае произвольная непрерывная сумма примарных колец некоторое кольцо типа C.

Оказывается, что это будет далеко не всегда, и задачей дальнейшего является описание тех случаев, когда приведенное построение приводит к желаемому результату.

Будем называть непрерывную прямую сумму $\sum'_F K_t$ правильно составленной, если для любого полинома $P(t_\alpha, \ldots, t_\omega)$ величина $\| P(X_{t\alpha}, \ldots, X_{t\omega}) \|_t$ является полунепрерывной сверху функцией от t. Легко проверить, что непрерывная сумма в теореме 1 правильно составлена; тем самым мы можем ограничиться изучением правильно составленных непрерывных сумм. В этом предположении имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. *Если множество $F \subset S$ является пространством максимальных идеалов некоторого кольца R_1 с образующими t_α $(\alpha \in \Phi)$, то пространство максимальных идеалов правильно составленной непрерывной суммы $\sum'_F K_t$ совпадает с F.*

Условие этой теоремы заведомо выполняется, если все координаты t_α для $t \in F$ вещественны.

Теорема 3. *Если $R = \sum'_F K_t$ — регулярное кольцо без радикала, то оно есть кольцо типа C.*

Для колец с вещественными образующими t_α можно сформулировать следующие достаточные условия регулярности и отсутствия радикала:

A. Условие регулярности (([1]), стр. 23). Положим $f_\alpha(p) = \| e^{ipt_\alpha} \| = \sup_t \| e^{ip(X_{t\alpha} + t_\alpha)} \|_t = \sup_t \| e^{ipX_{t\alpha}} e^{ipt_\alpha} \|_t = \sup_t \| e^{ipX_{t\alpha}} \|_t$ (p — вещественно).

Кольцо $\sum_F' K_t$ *регулярно, если для всех* $\alpha \in \Phi$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln f_\alpha(p) \frac{dp}{1+p^2} < \infty.$$

B. Условие отсутствия радикала. *Если каждая точка* $t \in F$ *является или внутренней точкой* F (*относительно* S) *или предельной для внутренних точек и все кольца* K_t *изоморфны одному и тому же кольцу* K, *а элементы* $X_{t\alpha}$ *не зависят от* t, *то* $R = \sum_F' K_t$ *не имеет радикала, если только соответствующая непрерывная сумма второго рода* $\sum_{B_\Phi}'' K_t$ (см. ниже) *регулярна.*

Непрерывная прямая сумма второго рода $\sum_B'' K_t$ примарных колец K_t по замкнутому подмножеству $B \subset S$ получается при пополнении семейства тригонометрических полиномов $T(t_\alpha, t_\beta, \ldots, t_\omega) = \sum a_{n_\alpha \cdots n_\omega} e^{i(n_\alpha t_\alpha + \cdots + n_\omega t_\omega)}$ ($n_\alpha, \ldots, n_\omega$ — целые числа любого знака) по норме $\| T(t_\alpha, \ldots, t_\omega) \| \sup_{t \in B} \| T(X_{t\alpha} + t_\alpha, \ldots, X_{t\omega} + t_\omega \|_t$; образующими этого кольца служат элементы $e^{\pm it_\alpha}$ ($\alpha \in \Phi$). Если на множестве $B = B_\Phi$ все координаты вещественны и меняются в пределах от 0 до 2π независимо друг от друга, то точка $z = \{e^{it_\alpha}\}$ описывает бикомпактную группу G_Φ — тихоновское произведение Φ окружностей. Относительно колец этого вида имеют место следующие предложения.

Теорема 1'. *Кольцо типа C, заданное на группе* G_Φ *и порожденное элементами* $e^{\pm it_\alpha}$, *как образующими, представляется в виде*

$$R = \sum_{B_\Phi}'' R / J(s).$$

Теорема 2'. *Пространство максимальных идеалов правильно составленной непрерывной суммы* $\sum_{B_\Phi}'' K_t$ *совпадает с* G_Φ.

Теорема 3'. *Если* $R = \sum_B'' K_t$ — *регулярное кольцо без радикала, то оно является кольцом типа C.*

Достаточные условия регулярности и отсутствия радикала:

A'. Условие регулярности. Пусть $f_\alpha(n) = \| e^{int_\alpha} \| = \sup_t \| e^{inX_{t\alpha}} \|_t$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Кольцо $\sum_{B_\Phi}'' K_t$ *регулярно, если для каждого* $\alpha \in \Phi$ *можно указать функцию* $f_\alpha^*(\nu)$ $(1 < \nu < \infty)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$f_\alpha(n) \leqslant f_\alpha^*(|n|) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots); \tag{I}$$

$$\nu f_\alpha^{*\prime}(\nu) / f_\alpha^*(\nu) \to +\infty \text{ монотонно при } \nu \to \infty; \tag{II}$$

$$\int_1^{\infty} \ln f_\alpha^*(\nu) \frac{d\nu}{1+\nu^2} < \infty. \tag{III}$$

Доказательство основано на теореме С. Мандельбройта (([2]), стр. 45).

B′. Условие отсутствия радикала. *Если все кольца* K_t $(t \in B_\Phi)$ *изоморфны одному и тому же кольцу* K *и элементы* $X_{t\alpha}$ *не зависят от* t, *то* $R = \sum''_{B_\Phi} K_t$ *не имеет радикала.*

Замечание. Условие A близко к необходимому; в ([1]), стр. 87—90, доказана его необходимость для некоторого класса колец. Условие B не является необходимым; в следующей заметке будут приведены более точные условия для колец с одной образующей. Тем не менее, каждое из трех требований этого условия в общем случае существенно; при отбрасывании хотя бы одного из них утверждение становится неверным, как показывают соответствующие примеры.

Поступило
13 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Е. Шилов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР (1947). [2] С. Мандельбройт, Квази-аналитические классы функций, 1937.