Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

В. С. ЧАРИН

О ПОЛНЫХ ГРУППАХ С КОРНЕВЫМ РЯДОМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 III 1949)

Настоящая статья посвящена доказательству теоремы о существовании центрального ряда у полных групп с корневым рядом конечной длины. Эта теорема, как и тема всей статьи, указана автору С. Н. Черниковым.

Некоторые результаты, полученные при поисках доказательства этой теоремы, представляют и самостоятельный интерес.

Такова, например, теорема 4, утверждающая, что всякая полная группа матриц над полем рациональных чисел, обладающая возрастающим центральным рядом, эквивалентна группе матриц треугольного вида и с единицами на главной диагонали.

Пусть P — поле рациональных чисел и $\Sigma = P(\theta)$ — его конечное алгебраическое расширение, полученное с помощью присоединения корня θ некоторого неприводимого в $P[x]$ полинома

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Мультипликативная группа поля P является прямым произведением циклических групп, порожденных всеми простыми числами, и группы второго порядка, порожденной числом -1. Возникает вопрос о строении мультипликативной группы поля Σ. Опираясь на теорему Дирихле о единицах поля Σ (см. ([1])), можно доказать:

Теорема 1. *Мультипликативная группа конечного алгебраического расширения Σ поля рациональных чисел разлагается в прямое произведение счетного множества бесконечных циклических групп и одной конечной циклической группы.*

Следствие. Всякое конечное алгебраическое расширение Σ поля P рациональных чисел обладает следующим свойством: если $\alpha \in \Sigma$ и степень α^n отлична от единицы для каждого натурального числа $n \geqslant 1$, то ни для одного $s \geqslant 2$ в поле Σ нельзя выбрать бесконечную последовательность элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ такую, что

$$\alpha_1^s = \alpha, \quad \alpha_2^s = \alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}^s = \alpha_k, \ldots.$$

В самом деле, иначе в мультипликативной группе поля Σ содержался бы отличный от единицы элемент бесконечного порядка, из которого можно было бы извлекать корень s-й степени бесконечное число раз, что, ввиду теоремы 1, невозможно.

Обозначим, далее, через $i(g)$ наименьшую из степеней неприводимых полиномов, на которые разлагается полином $g(x)$ из $P[x]$ в $P[x]$. Здесь P также обозначает поле рациональных чисел.

Пусть $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ — неприводимый полином из $P[x]$, отличный как от x, так и от любого полинома $\Phi_m(x)$ деления круга. Составим последовательность $\{f_k(x)\}$ полиномов

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = f_0(x^s), \ldots, \; f_{k+1}(x) = f_k(x^s), \ldots,$$

где s — целое рациональное число $\geqslant 2$.

Теорема 2. *Функция $i(f_k)$ неограниченно возрастает при неограниченном возрастании номера k.*

Теорема 3. *Если некоторая совокупность $\mathfrak{A}$ квадратных неособенных матриц над полем P рациональных чисел составляет полную группу, обладающую возрастающим центральным рядом, то все собственные значения каждой матрицы A из $\mathfrak{A}$ равны* 1.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на свойство полных групп, обладающих возрастающим центральным рядом, согласно которому для каждого $X \in \mathfrak{A}$ и любого целого числа n уравнение $X = Y^n$ разрешимо (см. (2)).

Теорема 4. *Если полная группа неособенных матриц над полем P рациональных чисел обладает возрастающим центральным рядом, то она эквивалентна группе треугольных матриц над тем же полем P с единицами на главной диагонали.*

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{R}$ — абелева группа, изоморфная прямому произведению конечного числа квазициклических и конечного числа аддитивных групп рациональных чисел, и $\mathfrak{G}$ — расширение группы $\mathfrak{R}$ с помощью некоторой полной группы $\mathfrak{B}$, обладающей возрастающим центральным рядом.*

Тогда группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом.

В частности, если длина верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{B}$ конечна, то конечной будет и длина верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 5 предполагается, что расширяющая группа $\mathfrak{B}$ имеет возрастающий центральный ряд. Теорема перестает быть справедливой, если $\mathfrak{B}$ — произвольная полная группа.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 5 предполагается, что расширяемая группа $\mathfrak{R}$ равна прямому произведению конечного числа групп рациональных чисел (если она не имеет элементов конечного порядка). В случае бесконечного множества прямых множителей теорема теряет силу.

Теорема 6. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ обладает конечным корневым рядом, т. е. последовательностью подгрупп*

$$\mathfrak{G}_0 = E \subset \mathfrak{G}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_{n-1} \subset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$$

со свойствами:

1) *$\mathfrak{G}_k$ есть нормальный делитель $\mathfrak{G}_{k+1}$;*

2) *$\mathfrak{G}_{k+1}/\mathfrak{G}_k$ изоморфна либо аддитивной группе рациональных чисел, либо группе типа p^∞ по некоторому простому числу p для $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Тогда $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом конечной длины.

Доказательство. Если длина n корневого ряда равна 1, то утверждение очевидно.

Будем вести доказательство по индукции. Предположим, что при длине корневого ряда, меньшей или равной n, теорема справедлива. Тогда для произвольной группы $\mathfrak{G}$ такого ряда справедливы результаты С. Н. Черникова, которые утверждают, что все факторы ее верхнего центрального ряда суть полные группы; центр ее содержит все элементы конечного порядка; все факторы этого ряда имеют конечный ранг и сумма этих рангов равна длине n корневого ряда (см. ([3])).

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ имеет корневой ряд длины $n+1$:

$$\mathfrak{G}_0 = E \subset \mathfrak{G}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_{n+1} = \mathfrak{G}.$$

Пусть

$$\mathfrak{Z}_0 = E \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_{k-1} \subset \mathfrak{Z}_k = \mathfrak{G}_n$$

верхний центральный ряд группы $\mathfrak{G}_n$.

Каждый гиперцентр $\mathfrak{Z}_i$ группы $\mathfrak{G}_n$ является нормальным делителем в $\mathfrak{G}$. Значит, $\mathfrak{G}$ есть расширение $\mathfrak{Z}_1$ с помощью группы $\mathfrak{G} / \mathfrak{Z}_1$. Но легко видеть, что $\mathfrak{G} / \mathfrak{Z}_1$ — полная и имеет длину корневого ряда $\leqslant n$. По индуктивному предположению $\mathfrak{G} / \mathfrak{Z}_1$ имеет возрастающий центральный ряд. Но группа $\mathfrak{Z}_1$ равна прямому произведению конечного числа аддитивных групп рациональных чисел и, может быть, еще конечного числа типа p^∞ по некоторым простым числам, т. е. квазициклических.

Ввиду теоремы 5 группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом. Опираясь на приведенные выше предположения С. Н. Черникова, можно утверждать, что группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом длины $\leqslant n+1$.

Теорема доказана.

Поступило
19 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Гекке, Лекции по теории алгебраических чисел, 1939. [2] С. Н. Черников, Матем. сб., **13** (55) (1943). [3] С. Н. Черников, Матем. сб., **22** (64) (1948).