Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ВНУТРЕННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РАДИУСА-ВЕКТОРА ТОЧКИ ЗАМКНУТОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 IV 1949)

Поверхность F называется регулярной, если в достаточно малой окрестности каждой ее точки могут быть введены локальные координаты u, v так, что радиус-вектор точки поверхности как функция координат u, v будет регулярной функцией. Такую координатную сеть мы будем называть регулярной сетью. Функцию точки $f(X)$ на регулярной поверхности F будем называть регулярной, если она, как функция регулярных координат точки, регулярна.

Пусть X — произвольная точка регулярной замкнутой выпуклой поверхности F; γ — направленная геодезическая на поверхности, проходящая через точку X; $\bar{\gamma}$ — геодезическая, перпендикулярная γ, проходящая через ту же точку. Выберем на $\bar{\gamma}$ положительное направление так, чтобы при повороте его влево около нормали к поверхности на угол $\pi/2$ оно совпало с положительным направлением γ. Введем на поверхности F в окрестности точки X полугеодезические координаты u, v, приняв геодезическую γ за линию $v=0$; геодезическую $\bar{\gamma}$ — за линию $u=0$; геодезические, перпендикулярные $\bar{\gamma}$, — за линии u; их ортогональные траектории — за линии v; в качестве координат u, v примем дуги геодезических γ и $\bar{\gamma}$, отсчитываемые от точки X. Пусть $ds^2 = du^2 + 9dv^2$ — линейный элемент поверхности в этих координатах. Если поверхность регулярна, то функция $g(u, v)$ является регулярной функцией переменных u, v. Вводим функцию $g_{\gamma(i,j)}(X)$ равенством

$$g_{\gamma(i,j)}(X) = \left.\frac{\partial^{i+j} g(u, v)}{\partial u^i \partial v^j}\right|_{u=v=0}.$$

Обозначим m_k верхнюю грань значений модуля функций $g_{\gamma(i,j)}(X)$ при $i+j \leqslant k$ по всем X и γ на поверхности F. Пусть $f(Y)$ — регулярная функция на поверхности F. Функция f, как функция введенных выше полугеодезических координат точки, будет регулярной функцией. Введем функции

$$f_{\gamma(i,j)}(X) = \left.\frac{\partial^{i+j} f(u, v)}{\partial u^i \partial v^j}\right|_{u=v=0}.$$

Если поверхность F имеет всюду существенно положительную гауссову кривизну, то $g_{\gamma(2,0)}(X)$ для всех X и γ отрицательна. Обозначим $\bar{m}$ точную нижнюю грань значений модуля функции $g_{\gamma(2,0)}(X)$. Как известно, для радиусов R_1 и R_2 вписанного и описанного шара поверхности F может быть указан нижний и, соответственно, верхний предел в зависимости только от $\overline{m}$ и m_2. Поместим начало прямоугольной декартовой системы координат O внутрь вписанного в поверхность шара на расстоянии, не большем $R_1/2$ от его центра. Пусть $r(X)$ — расстояние произвольной точки X поверхности от начала координат. Функция $r(X)$ является регулярной функцией на поверхности.

Теорема. *Если F — регулярная замкнутая выпуклая поверхность с положительной всюду гауссовой кривизной, то для модуля каждой из функций $r_{\Upsilon(i,j)}(X)$ может быть указан верхний предел, зависящий только от $\overline{m}$ и m_2 при $i+j\leqslant 1$, от $\overline{m}$ и m_{k+2} при $i+j\geqslant 2$.*

Оценки верхней грани модулей функций $r_{\Upsilon(i,j)}(X)$ при $i+j\leqslant 2$ получаются в общем довольно просто, если воспользоваться теоремой Боннэ о диаметре овальной поверхности и оценкой Вейля для средней кривизны поверхности в зависимости от ее гауссовой кривизны. Мы на этом останавливаться не будем.

Оценки верхней грани модулей функций $r_{\Upsilon(i,j)}(X)$ при $i+j\geqslant 3$ получить гораздо труднее. Эти оценки мы получим при помощи метода вспомогательных функций С. Н. Бернштейна [1]. Применить этот метод непосредственно невозможно, потому что на поверхности, гомеоморфной сфере, нельзя ввести координатную сеть, регулярную на всей поверхности. Трудность эта преодолевается нами введением инвариантной вспомогательной функции.

Функция $r(Y)$ как функция введенных нами полугеодезических координат u, v удовлетворяет уравнению Монжа — Ампера эллиптического типа:

$$(r_{uu}+a)(r_{vv}+c)-(r_{uv}+b)^2+d=0; \tag{1}$$

здесь коэффициенты a, b, c, d — известные функции от r, r_u, r_v, g и производных функции g по u и v не выше второго порядка, причем a, b и c вторых производных функции g не содержат. Обозначим:

$$r_{vv}+c=A(r_{vv}, r_u, r_v, r, g, g_u\ g_v),$$

$$-(r_{uv}+b)=B(r_{uv}, r_u, r_v, r, g, g_u, g_v),$$

$$r_{uu}+a=C(r_{uu}, r_u, r_v, r, g, g_u, g_v);$$

$$A_\Upsilon(X)=A(r_{\Upsilon(0,2)}, r_{\Upsilon(1,0)}, r_{\Upsilon(0,1)}, r, 1, 0, 0),$$

$$B_\Upsilon(X)=B(r_{\Upsilon(1,1)}, r_{\Upsilon(1,0)}, r_{\Upsilon(0,1)}, r, 1, 0, 0),$$

$$C_\Upsilon(X)=C(r_{\Upsilon(2,0)}, r_{\Upsilon(1,0)}, r_{\Upsilon(0,1)}, r, 1, 0, 0);$$

$$\overline{u}_{\Upsilon,\chi}(u,v)=e^{e^{\frac{r_{uu}+M}{\alpha}}}.$$

Здесь M — верхний предел модуля функции $r_{\Upsilon(2,0)}(X)$, α — некоторое малое положительное число, величина которого определяется ниже. Вводим теперь функцию $w_\Upsilon(X)$

$$w_\Upsilon(X)=A_\Upsilon\overline{u}^2_{\Upsilon(1,0)}+2B_\Upsilon\overline{u}_{\Upsilon(1,0)}\overline{u}_{\Upsilon(0,1)}+C_\Upsilon\overline{u}^2_{\Upsilon(0,1)},$$

где

$$\bar{u}_{\gamma(i,j)}(X) = \frac{\partial^{i+j}\bar{u}_{\gamma,\chi}}{\partial u^i\,\partial v^j}\bigg|_{u=v=0}.$$

Функция $w_\gamma(X)$ достигает на поверхности F своего максимума в некоторой точке X_0 для некоторой геодезической γ_0, проходящей через эту точку. Введем в окрестности точки X_0 полугеодезические координаты описанным выше способом и определим в этой окрестности функции $w(X)$ и $\bar{u}(X)$ равенствами $w(X) = w_{\gamma(X)}(X)$, $\bar{u}(X) = \bar{u}_{\gamma_0 X_0}(X)$, где $\gamma(X)$ — это геодезическая $v = \mathrm{const}$, проходящая через точку X. Для функции $w(X)$ имеем следующее выражение:

$$w = A_1 p_1^2 + 2B_1 p_1 q_1 + C_1 q_1^2,$$

где

$$A_1 = A_{\gamma(X)}, \quad B_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} B_{\gamma(X)}, \quad C_1 = \frac{1}{g} C_{\gamma(X)}, \quad p_1 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}, \quad q_1 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}.$$

Дифференцируя два раза по u уравнение (1) и вводя вместо функции $r(u, v)$ функцию $\bar{u}(u, v)$, так же как в работе С. Н. Бернштейна ([1]), получим для $\bar{u}$ уравнение:

$$\begin{gathered} Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = \frac{1}{\bar{u}\ln\bar{u}}\{[A(1+\ln\bar{u}) + \alpha\bar{a}]p_1^2 + \\ + 2[B(1+\ln\bar{u}) + \alpha\bar{b}]p_1 q_1 + [C(1+\ln\bar{u}) + \alpha\bar{c}]q_1^2\} + \\ + 2\bar{d}p_1 + 2\bar{e}q_1 + \bar{f}\frac{\bar{u}\ln\bar{u}}{\alpha} = Q_1, \end{gathered} \tag{2}$$

где r_1, s_1, t_1 — вторые частные производные функции $\bar{u}(u, v)$, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$ — известные функции $r(u, v)$ и ее производных до второго порядка, $g(u, v)$ и ее производных до четвертого порядка.

Функция $w(X)$ достигает в точке X_0 максимума. Поэтому в этой точке $w_u = 0$, $w_v = 0$. Присоединяя к этим равенствам уравнение (2) и замечая, что в точке X_0 $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, получаем следующие выражения для r_1, s_1, t_1 в точке X_0:

$$(A_1C_1 - B_1^2)\,wr_1 = w(B_1p_1 + C_1q_1)^2\,\frac{1+\ln\bar{u}}{\bar{u}\ln\bar{u}} + \frac{\alpha g_1}{\bar{u}\ln\bar{u}} + h_1 + l_1\frac{\bar{u}\ln\bar{u}}{\alpha},$$

$$(A_1C_1 - B_1^2)\,ws_1 = -w(B_1p_1 + C_1q_1)(A_1p_1 + B_1q_1)\frac{1+\ln\bar{u}}{\bar{u}\ln\bar{u}} + \frac{\alpha g_2}{\bar{u}\ln\bar{u}} + h_2 + l_2\frac{\bar{u}\ln\bar{u}}{\alpha},$$

$$(A_1C_1 - B_1^2)\,wt_1 = w(A_1p_1 + B_1q_1)\,\frac{1+\ln\bar{u}}{\bar{u}\ln\bar{u}} + \frac{\alpha g_3}{\bar{u}\ln\bar{u}} + h_3 + l_3\frac{\bar{u}\ln\bar{u}}{\alpha},$$

где g_1, g_2, g_3 — многочлены не выше четвертой степени относительно p_1, q_1; h_1, h_2, h_3 — не выше третьей степени; l_1, l_2, l_3 — многочлены не выше второй степени и все с коэффициентами, зависящими только от $r_{\gamma_0(i,j)}(X_0)$ $(i + j \leqslant 2)$ и $g_{\gamma_0(i,j)}(X_0)$ $(i + j \leqslant 4)$.

Затем вычисляем выражение $K = \frac{1}{2}\left\{A_1\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2B_1\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + C_1\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right\}$ в точке X_0. При этом снова, замечая, что в точке X_0 $A_1 = A$, $B_1 = B$,

$C_1 = C$, и проводя вычисление точно так же, как в работе С. Н. Бернштейна ([1]), приводим выражение для K к виду:

$$w^2K = -\frac{1+\ln\bar{u}+(\ln\bar{u})^2}{(\bar{u}\ln\bar{u})^2}\,w^4 + \left(\frac{1+\ln\bar{u}}{\bar{u}\ln\bar{u}}\right)^2 w^4 + \alpha\,\frac{1+\ln\bar{u}}{(\bar{u}\ln\bar{u})^2}\,P_6 w +$$

$$+\frac{\alpha^2}{(\bar{u}\ln\bar{u})^2}\,P_8 + \frac{1+\ln\bar{u}}{\bar{u}\ln\bar{u}}\,P_7 + \frac{\alpha}{\bar{u}\ln\bar{u}}\,P'_7 + \frac{\bar{u}\ln\bar{u}}{\alpha}\,P'_6 + P''_6 + \left(\frac{\bar{u}\ln\bar{u}}{\alpha}\right)^2 P_4,$$

где $P_k^{(i)}$ обозначает полином степени k относительно p_1, q_1 с коэффициентами, зависящими от $r_{\gamma_0(i,j)}(X_0)$ $(i+j\leqslant 2)$ и $g_{\gamma_0(i,j)}(X_0)$ $(i+j\leqslant 5)$. Если число α выбрать достаточно малым, совокупность членов восьмой степени относительно p_1, q_1 в выражении w^2K будет больше $\frac{w^4}{2\bar{u}\ln\bar{u}}$. Потому при достаточно малом α будет

$$w^2K > \frac{w^4}{2\bar{u}^2\ln\bar{u}} + T_7.$$

Но так как $K \leqslant 0$, то w не может быть очень большим. Этим устанавливается верхний предел модуля функции $w(X)$ в точке X_0. Но $|w_\gamma(X)| \leqslant |w(X_0)|$.

Зная верхний предел модуля $w_\gamma(X)$, уже совсем элементарно можно оценить верхние пределы модулей $r_{\gamma(i,j)}(X)$ при $i+j=3$. Оценки для модулей функций $r_{\gamma(i,j)}(X)$ при $i+j>3$ получаем аналогично.

Поступило
20 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. математ. об-ва, 11, № 3—4, 141 (1909).