Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

А. ЛУНЦ

БИКОМПАКТ, ИНДУКТИВНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ КОТОРОГО БОЛЬШЕ, ЧЕМ РАЗМЕРНОСТЬ, ОПРЕДЕЛЕННАЯ ПРИ ПОМОЩИ ПОКРЫТИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1949)

Эквивалентность индуктивного определения размерности и определения размерности при помощи покрытий доказана П. С. Урысоном для случая компактов и затем для метрических пространств со счетной базой. Неравенство $\dim R \leqslant \operatorname{ind} R$ легко доказывается для любых бикомпактов. Вопрос об обратном неравенстве не был решен.

Ниже строится бикомпакт (бикомпактное хаусдорфово пространство) R, обладающий индуктивной размерностью 2 ($\operatorname{ind} R = 2$) размерностью, определенной с помощью покрытий, равной 1 ($\dim R = 1$).

Этот результат является решением задачи, еще в 1935 г. поставленной П. С. Александровым, и получен мною во время занятий в руководимом им топологическом семинаре.

1. $\omega(c)$ обозначает первое трансфинитное число мощности континуума (c). Пусть T — вполне упорядоченное множество типа $\omega(c)+1$. Пусть S — неархимедова прямая, полученная соединением каждой пары трансфинитов α, $\alpha+1 \in T$ отрезком $I_\alpha = [0, 1]$; точнее, S есть множество пар (α, a), где $\alpha \in T$, $\alpha < \omega(c)$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, причем $(\alpha, a) = (\beta, b)$ тогда и только тогда, когда либо $\alpha = \beta$, $a = b$, либо $\alpha + 1 = \beta$, $a = 1$, $b = 0$; $(\alpha, a) < (\beta, b)$, если либо $a < \beta$ (исключение составляет только рассмотренный выше случай $\alpha + 1 = \beta$, $a = 1$, $b = 0$), либо $\alpha = \beta$, $a < b$. В дальнейшем точки множества S вместо (α, a) будем обозначать αa; если $a = 0$, пишем α вместо $\alpha 0$. Множество точек $x \in S$, таких, что $x \geqslant \alpha a$, обозначим $S_{\alpha a}$.

2. Упорядочение, введенное в S, индуцирует там топологию. Именно, окрестности, составляющие базис, суть множества точек $x \in S$, удовлетворяющих неравенству: $\alpha a < x < \beta b$ для любых αa, βb (окрестности внутренних точек S), а также множества точек $x \in S$, превосходящих произвольный элемент в смысле введенного в S порядка, и множества точек, предшествующих любому данному элементу из S (это — окрестность концевых точек 0 и $\omega(c)$).

Пространство S есть непрерывный порядковый тип с первым и последним элементами и, следовательно, S — бикомпакт.

3. Обозначим через R_2 топологическое произведение S на отрезок $I = [0, 1]$. Если $A \subset S$, $B \subset I$, то подмножество пространства R_2, являющееся топологическим произведением A и B, обозначим (A, B); в частности, всякая точка $x \in R_2$ обозначается: $(\alpha a, b)$, где $\alpha a \in S$, $b \in I$ — координаты точки x. R_2 есть бикомпакт, и его базис состоит из окрестностей вида (U_S, U_I), где U_S и U_I — любые окрестности базисов S и I (считаем, что базис I состоит из всех интервалов $b_1 < x < b_2$ и полуинтервалов $0 \leqslant x < b_1$ и $b_2 < x \leqslant 1$).

4. Рассмотрим на плоскости XOY замкнутый единичный квадрат Q с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ и в нем топологическое произведение K канторова совершенного множества C, лежащего на отрезке $[0, 1]$ оси OX, на отрезок $[0, 1]$ оси OY. Занумеруем все смежные интервалы C натуральными числами. Пусть l_{ik} — интервал, параллельный оси OX и проектирующийся на OX на i-й смежный интервал множества C, а на OY — в точку $y = \frac{k}{i+1}$ $(k = 1, \ldots, i)$. Обозначим $F = K \cup \bigcup_{i,k} l_{ik}$. Легко видеть, что $\overline{\bigcup_{i,k} l_{ik}} = F$; следовательно, в частности, F замкнуто в Q.

5. Легко доказать: если $a \in F$ и a лежит или на каком-либо l_{ik} или на каком-либо отрезке L второго рода множества K, т. е. на отрезке, координата которого на OX есть точка двустороннего накопления множества C, то проекция на OX — $V_x(a)$ — любой окрестности $V(a)$ в F точки a содержит интервал, покрывающий проекцию a_x точки a.

6. Занумеруем все пары чисел (x, y), $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1$, всеми трансфинитами $\alpha \in T$. Пара $f(\alpha) = (x, y)$ с данным номером α обозначается (x_α, y_α). Построим теперь для каждого $\alpha \in T$ множество F_α. Выберем для этого в $K \subset F$ (см. п. 4) раз навсегда определенный отрезок второго рода L. Для каждого $\alpha \in T$ сдвинем множество F на плоскости XOY параллельно оси OX так, чтобы отрезок L получил абсциссу x_α: пересечение результата сдвига множества F с неподвижным Q обозначим F_α. F_α замкнуто в Q. Образ отрезка L при сдвиге обозначим L_α.

7. Множество точек $x = \alpha a \in S$ таких, что α фиксировано, а число a принимает все значения между 0 и 1, мы обозначили I_α (см. п. 1). В квадрате $(I_\alpha, I) = Q_\alpha \subset R_2$ построим множество F_α, считая, что отрезок $(I_\alpha, 0)$ играет роль отрезка $[0, 1]$ оси OY. Определим подпространство $R \subset R_2$ как сумму подмножеств $(\alpha, I) \subset R_2$ для всех α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \omega(c)$, и подмножеств $F_\alpha \subset R_2$ для всех α, $0 \leqslant \alpha < \omega(c)$. Очевидно, R замкнуто в R_2, т. е. R есть бикомпакт.

Пусть $x \in (\omega(c), I)$, $x = (\omega(c), h)$, $0 < h < 1$. Пусть $U = U(x) = U' \cap R$ — окрестность точки x в R, $U' = (S_\tau, (h_1 h_2))$ — базисная окрестность в R_2, (h_1, h_2) — интервал на I, $h_1 < h < h_2$; $\tau \in T$. Пусть V — любая окрестность x в R, $V \subseteq U$. Ниже (пп. 8 — 16) мы доказываем, что граница V имеет размерность не меньше 1. Этим будет доказано, что $\operatorname{ind} R \geqslant 2$.

8. Пусть $h(\xi)$ — верхняя грань тех чисел $h' \in I$, для которых $(S_\xi, [0, h']) \cap V = 0$. При увеличении $\xi \in T$ число $h(\xi)$ монотонно растет; различные значения $h(\xi)$ образуют счетное вполне упорядоченное множество. Отсюда следует, что существует $\xi_0 \in T$ такое, что если $\xi \geqslant \xi_0$, то $h(\xi) = h(\xi_0) = \max_{\alpha \in T} h(\alpha)$ (иначе нашлась бы счетная последовательность $\{\xi_i\} \subset T$, конфинальная всему T, что невозможно). Множество $(S_{\xi_0}, h(\xi_0))$ обозначим S^0.

9. Легко доказывается, что для любого α, принадлежащего T и отличного от $\omega(c)$, найдется точка $x \in S^0$, $x = (\beta b, h(\xi_0))$, принадлежащая $\overline{V}$ и лежащая на S^0 между α и $\omega(c)$ $(\alpha < \beta b < \omega(c))$.

10. При соответствии $f(\alpha)$ каждому $x \in I$ соответствует множество мощности континуума таких $\alpha \in T$, что $x_\alpha = x$ (п. 6). Множество $M(x) \subset T$ всех $\alpha \in T$, соответствующих данному $x \in I$, будучи континуальным, конфинально всему T, ибо $\omega(c)$ — первое число мощности континуума. Это означает, что для любых $t \in I$, $\xi \in T$, множество (S_ξ, t) пересекается с F_α для континуального множества $M(t, \xi)$ раз-

личных α по отрезкам $L_\alpha \subset F_\alpha$ (см. построение пп. 6 и 7). Множество $M(h(\xi_0), \xi_0)$ обозначим через M.

11. Если $L_\alpha \subset \overline{V}$ для какого-либо $\alpha \in M$, то L_α принадлежит границе V (ибо $L_\alpha \subset R \setminus V$ в силу выбора множества M) и, следовательно, граница V не менее чем одномерна.

12. Пусть теперь $L_\alpha \not\subset \overline{V}$ для каждого $\alpha \in M$. Сделаем для каждого $\alpha \in M$ следующее построение. Выберем в $L_\alpha \setminus \overline{V}$ одну внутреннюю для L_α точку $z_\alpha = (\alpha a,\ h(\xi_0))$, $0 < a < 1$, и возьмем ее базисную окрестность U'_α в R_2, лежащую внутри $Q_\alpha = (I_\alpha,\ I)$ вместе со своим замыканием, $U'_\alpha = (U^\alpha_S,\ U^\alpha_I)$, $U_S = (\alpha a_1,\ \alpha a_2)$, $0 < a_1 < a < a_2 < 1$, так, чтобы $U'_\alpha \cap V = 0$.

Положим $U_\alpha = U'_\alpha \cap R$. Согласно п. 5 естественная (координатная) проекция U_α на I содержит интервал $(t'_\alpha,\ t^2_\alpha)$, имеющий $h(\xi_0)$ своей внутренней точкой. Число $t^2_\alpha - h(\xi_0)$ (длину интервала $(h(\xi_0),\ t^2_\alpha)$) обозначим $\varepsilon(\alpha)$.

13. Существует такое $\varepsilon > 0$ и такое подмножество N множества M, имеющее мощность континуума, что для всех $\alpha \in N$ имеем: $\varepsilon(\alpha) > \varepsilon$.

14. Для каждого $\alpha \in N$ найдем $\beta b = \beta b(\alpha) > \alpha + 1$, $\beta b < \omega(c)$, такое, что $(\beta b,\ h(\xi_0)) = z'_\alpha \in \overline{V}$ (см. п. 9). Любая окрестность точки z'_α пересекается с V. Возьмем окрестность $W_\alpha = W(z'_\alpha) = W'_\alpha \cap R$, где W'_α — базисная окрестность в R_2, причем $W'_\alpha = (U'^\alpha_S,\ U'^\alpha_I)$, $U'^\alpha_S = (\gamma^\alpha_1,\ \gamma^\alpha_2)$, $U'^\alpha_I = (h(\xi_0) - \varepsilon,\ h(\xi_0) + \varepsilon)$, где $\alpha + 1 \leqslant \gamma^\alpha_1 < \beta b < \gamma^\alpha_2 < \beta + 1$, ε выбрано в п. 13. В W_α возьмем $y_\alpha \in V$ и произвольную окрестность $V_\alpha = V(y_\alpha) \subset V \cap W_\alpha$. Проекция V_α на I содержит некоторый интервал длины $\nu(\alpha)$, содержащийся, в свою очередь, в интервале $(h(\xi_0),\ h(\xi_0) + \varepsilon)$.

15. Так же, как в п. 13, доказываем, что найдутся $\nu > 0$ и множество $N_1 \subseteq N$ мощности континуума такие, что $\nu(\alpha) > \nu$ для каждого $\alpha \in N_1$.

Интервал $(h(\xi_0),\ h(\xi_0) + \varepsilon)$ разобьем на n равных интервалов $(a_i,\ a_{i+1})$, где $n > 2\varepsilon/\nu$; существуют множество $N_2 \subseteq N_1$ мощности континуума и интервал $A = (a_{i_0},\ a_{i_0+1})$ такие, что проекции всех V_α $(\alpha \in N_2)$ содержат интервал $A \subset I$.

16. Счетную последовательность $\{\alpha_j\} \subset N_2$ построим так: α_1 — произвольный элемент N_2. Пусть выбрано α_{k-1}; возьмем в качестве α_k первый элемент из N_2, превосходящий $\beta + 1$, где $\beta b = \beta b(\alpha_{k-1})$ (см. п. 14). Последовательность $\{\alpha_j\}$, будучи счетной, сходится к некоторому $\alpha_0 \in T$, $\alpha_0 < \omega(c)$. Легко показать, что все точки интервала $(\alpha_0,\ A)$ принадлежат границе V. С другой стороны, легко видеть, что граница всякой базисной окрестности в R и даже в R_2 не более, чем одномерна. Следовательно, $\operatorname{ind} R = 2$.

17. Весьма просто можно показать, что $\dim R = 1$. Действительно, в любое заданное конечное открытое покрытие пространства R можно вписать покрытие, состоящее из конечного числа замыканий базисных окрестностей и притом так, чтобы это покрытие имело кратность выше 2 лишь в конечном числе точек. Произведя малое изменение такого покрытия в окрестности каждой из этих точек, мы можем „сдвинуть“ эти точки в $R_2 \setminus R$ (ибо R нигде не плотно в R_2) так, чтобы полученное покрытие было все еще вписано в исходное. Значит, $\dim R = 1$.

Математический институт
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 IV 1949