Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

А. С. КРОНРОД

О ЛИНЕЙНОЙ И ПЛОСКОЙ ВАРИАЦИЯХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 V 1949)

I. Линейная вариация. На протяжении всей заметки, кроме 11° и 18°, мы будем рассматривать непрерывные функции $f(\eta)$, заданные в квадрате или на двумерной сфере. Область задания обозначается J.

1°. Множеством уровня E_t (или уровнем t) функции $f(\eta)$ называется множество всех точек $\xi \subset J$, где $f(\xi) = t$.

Компонента K множества уровня E_t называется регулярной, если она разделяет J на две области J_1 и J_2. Если, кроме того, K есть общая граница J_1 и J_2, то K называется правильной компонентой.

Неразделяющая компонента K множества уровня E_t называется: a) компонентой концентрической особенности, если, какова бы ни была окрестность U компоненты K, найдется компонента K' того же уровня, лежащая внутри U и отделяющая K от CU; b) компонентой полуэкстремума, если существует континуум R, пересекающийся с K, не лежащий целиком в K и не пересекающийся с $E_t - K$.

При этом: α) если $f(\eta) \geqslant t$ при $\eta \subset R$, то K — компонента полуминимума; β) если $f(\eta) \leqslant t$ при $\eta \subset R$, то K — компонента полумаксимума.

Теорема 1. *Всякая неразделяющая компонента есть:* 1) *либо компонента концентрической особенности,* 2) *либо компонента полумаксимума,* 3) *либо компонента полуминимума, причем случаи* 1)—3) *попарно несовместны.*

2°. Пусть ξ — фиксированная точка, $K \not\supset \xi$ — регулярная компонента уровня t и $J_1 \supset \xi$ и J_2 — области, на которые K разделяет J.

Тогда: a) внутренней характеристикой K^* называется замкнутое множество $J_1 + K$ — неразделяющая компонента уровня t функции $f^*(\eta)$; $f^*(\eta) = f(\eta)$ при $\eta \subset J_2$, $f^*(\eta) = t$ при $\eta \subset J_1$; b) внешней характеристикой K^{**} называется замкнутое множество $K + J_2$ — неразделяющая компонента уровня t функции $f^{**}(\eta)$; $f^{**}(\eta) = f(\eta)$ при $\eta \subset J_1$, $f^{**}(\eta) = t$ при $\eta \subset J_2$.

Теорема 2. *Пусть $f(\eta)$ — непрерывная функция в области J. Тогда:* a) *среди множеств уровня E_t лишь не более чем счетное число содержит точки экстремума и регулярные неправильные компоненты;* b) *среди E_t не более чем счетное число их содержит компоненты, делящие J более чем на две части;* c) *среди всех прочих E_t всякое E_t содержит либо одни только регулярные компоненты, либо, если содержит хотя бы одну нерегулярную ком-*

поненту, то содержит и бесконечное число регулярных; d) *неразделяющие компоненты и характеристики регулярных компонент делятся на типы согласно теореме* 1.

3°. Регулярная компонента $K \not\supset \xi$ называется компонентой роста (убывания) относительно ξ, если ее внутренняя характеристика есть компонента полуминимума функции $f^{*}(\eta)$, а внешняя — компонента полумаксимума функции $f^{**}(\eta)$ (соотв., внутренняя характеристика — компонента полумаксимума, а внешняя — полуминимума).

Непрерывная функция $f(\eta)$ называется: 1) монотонно возрастающей (относительно ξ), если каждая регулярная компонента $K \not\supset \xi$ каждого ее множества уровня есть компонента роста; 2) монотонно убывающей (относительно ξ), если $-f(\eta)$ монотонно возрастающая (относительно ξ) функция.

Если $f(\eta)$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) относительно точки ξ функция, то для каждой ее регулярной компоненты внутренняя характеристика есть компонента минимума (соотв., максимума), а не только полуминимума (соотв. полумаксимума).

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием монотонности функции* $f(\eta)$ *является*:

A. *Связность лебеговского множества* $\underline{M}_{t_0} = \sum\limits_{t < t_0} E_t$ *для любого* t_0 *в случае монотонного возрастания.*

B. *Связность лебеговского множества* $\overline{M}_{t_0} = \sum\limits_{t > t_0} E_t$ *для любого* t_0 *в случае монотонного убывания.*

4°. Обозначим через ${}_{\xi}^{\zeta}\Phi^{в\pm}(t)$ (соотв. ${}_{\xi}^{\zeta}\Phi^{г\pm}(t)$) число компонент уровня t, разделяющих (соотв. не разделяющих) плоскость, разделяющих точки ξ и ζ и не являющихся компонентами убывания (роста) относительно точки ξ. Функции ${}_{\xi}^{\zeta}\Phi^{в,г\pm}(t)$ оказываются измеримыми функциями t.

Положим ${}_{\xi}^{\zeta}V^{в(г)\pm}(F) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} {}_{\xi}^{\zeta}\Phi^{в(г)\pm}(t)\,dt$. Величина ${}_{\xi}^{\zeta}V^{в+}(F)$ называется положительной внутренней (соотв. $V^{в-}$, $V^{г+}$ и $V^{г-}$ — отрицательной внутренней, положительной и отрицательной граничными) вариацией функции $F(\eta)$ от точки ξ до точки ζ. ${}_{\xi}^{\zeta}V^{в}(F) = {}_{\xi}^{\zeta}V^{в+}(F) + {}_{\xi}^{\zeta}V^{в-}(F)$ называется полной внутренней, а ${}_{\xi}^{\zeta}V^{г}(F) = {}_{\xi}^{\zeta}V^{г+}(F) + {}_{\xi}^{\zeta}V^{г-}(F)$ — полной граничной вариациями от ξ до ζ. ${}_{\xi}^{\zeta}V^{+}(F) = {}_{\xi}^{\zeta}V^{в+}(F) + {}_{\xi}^{\zeta}V^{г+}(F)$ — положительная, а ${}_{\xi}^{\zeta}V^{-}(F) = {}_{\xi}^{\zeta}V^{в-}(F) + {}_{\xi}^{\zeta}V^{г-}(F)$ — отрицательная вариации от ξ до ζ.

Опуская в определении функции ${}_{\xi}^{\zeta}\Phi^{в,г\pm}(t)$ условие на компоненту K разделять ξ и ζ, а в обозначениях — индекс ζ, мы получаем вариации ${}_{\xi}V^{в\pm}(F)$, ${}_{\xi}V^{г\pm}(F)$, $V^{в}(F) = {}_{\xi}V^{в+}(F) + {}_{\xi}V^{в-}(F)$; $V^{г}(F) = {}_{\xi}V^{г+}(F) + {}_{\xi}V^{г-}(F)$ и ${}_{\xi}V^{\pm}(F) = {}_{\xi}V^{в\pm}(F) + {}_{\xi}V^{г\pm}(F)$, называемые, соответственно, внутренней и граничной, положительной или отрицательной вариациями. Наконец, $V(F) = {}_{\xi}V^{+}(F) + {}_{\xi}V^{-}(F)$ называется просто линейной вариацией функции $F(\eta)$.

5°. Все введенные вариации полунепрерывны сверху, т. е. коль скоро функции $F_n(\eta)$ равномерно сходятся к $F(\eta)$, то ${}_{\xi}^{\zeta}V^{\cdot\cdot}(F) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} {}_{\xi}^{\zeta}V^{\cdot\cdot}(F_n)$ и ${}_{\xi}V^{\cdot\cdot}(F) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} {}_{\xi}V^{\cdot\cdot}(F_n)$.

6°. Если $J = J_1 + J_2$, где J_1 и J_2 — замкнутые области, и $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ — функции, постоянные: $F_1(\eta)$ — в J_2, а $F_2(\eta)$ — в J_1, то ${}^{\zeta}_{\xi}V^{s+}(F_1 + F_2) = {}^{\zeta}_{\xi}V^{s+}(F_1) + {}^{\zeta}_{\xi}V^{s+}(F_2)$. Аналогичное свойство имеет место и для всех остальных вариаций.

7°. Если τ — гомеоморфное преобразование J в себя и $f^*[\tau(\eta)] = f(\eta)$, то соответствующие вариации функции $f^*(\eta)$ и $f(\eta)$ (относительно точек ξ и ζ и $\tau(\xi)$ и $\tau(\zeta)$, соответственно) совпадают. Для любых точек ξ_1 и ξ_2 границы J, кроме того, ${}_{\xi_1}V^{s\pm}(f) = {}_{\xi_2}V^{s\pm}(f)$. Поэтому положительная и отрицательная внутренние (относительно точек границы), а также граничная (в случае, когда J — квадрат) вариации ${}_{\xi}V^{s\pm}(f)$ и ${}_{\xi}V^{г}(f)$ инвариантны относительно гомеоморфных преобразований J в себя. Это последнее свойство — инвариантность вариации $V(F)$ относительно гомеоморфизмов J в себя — вместе со свойствами 5° и 6° определяет неотрицательный функционал $V(F)$ однозначно с точностью до трех констант: $A^{\pm} = V(\pm\varphi)$ и $A^0 = V(\theta)$, где $\varphi(\eta) = \rho(\eta, C)$, C — граница J и $\theta(x, y) = x$.

8°. Рассмотрим вариации ${}^{\eta}_{\xi}V^{\cdot\cdot}(F)$ как функции точки η. Тогда $\varphi^+(\eta) = {}^{\eta}_{\xi}V^+(F)$ и $\varphi^-(\eta) = {}^{\eta}_{\xi}V^-(F)$ суть монотонно возрастающие функции в смысле 3° относительно точки ξ.

Теорема 4. *Если $f(\eta)$ — функция ограниченной линейной вариации и ξ — произвольная точка, то $f(\eta)$ допускает представление $f(\eta) = \varphi(\eta) - \psi(\eta)$, где $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ — непрерывные монотонно возрастающие (относительно ξ) функции. Среди всех таких представлений представление $f(\eta) = {}^{\eta}_{\xi}V^+(f) - {}^{\eta}_{\xi}V^-(f) + f(\xi)$ минимально, т. е. коль скоро $\varphi(\xi) = f(\xi)$, то $\varphi(\eta) \geqslant f(\xi) + {}^{\eta}_{\xi}V^+(f)$ и $\psi(\eta) \geqslant {}^{\eta}_{\xi}V^-(f)$ для всех точек $\eta \subset J$.*

9°. Функция $f(\eta)$ осуществляет непрерывное разложение области задания J. Соответствующее пространство компонент есть локально связный одномерный континуум без циклов, не гомологичных нулю,— одномерное дерево T_f функции $f(\eta)$. Каждые две точки такого континуума соединимы единственной простой дугой. Концы T_f соответствуют не разделяющим, а точки ветвления — разделяющим J более чем на две области компонентам множеств уровня.

Пусть $f^*(l)$ — функция, заданная на T_f так: $f^*[\tau(K)] = t$, если $K \subset E_t$ и τ — отображение J в T_f, задаваемое функцией $f(\eta)$. Вариация ${}^{\eta}_{\xi}V(f)$ совпадает с вариацией функции $f^*(l)$ по единственной простой дуге, соединяющей $\tau(\xi)$ и $\tau(\eta)$, линейная вариация $V(f)$ совпадает с суммарной вариацией $f^*(l)$ по всем „ветвям“ дерева T_f. Эта аналогия может быть продолжена.

10°. Ограниченность линейной вариации функции $f(\eta)$ не следует из непрерывной дифференцируемости $f(\eta)$, но следует из подчинения частных производных условию Липшица.

11°. Результаты 1° — 9° без изменения переносятся на случай, когда J—n-мерный куб или n-мерная сфера (кроме второй половины 7°). В 10° следует требовать удовлетворения условия Липшица для $n - 1$-х частных производных.

II. Плоская вариация.

12°. Пусть $\nu(E)$ — одномерная мера Хаусдорфа ([1]) множества E. Пусть $f(\eta)$ — непрерывная функция, заданная на J, и $G \subset J$ — открытое множество. Положим $\nu(G, t) = \nu(E_t \cap G)$. Определим плоскую вариацию $W(F, G)$ функции $f(\eta)$ на открытом множестве G так: $W(F, G) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu(G, t)\, dt$. Пусть M есть B-множество, положим

$W(F, M) = \inf\limits_{G \supset M} W(F, G)$, где inf берется по всем открытым множествам, содержащим M.

Теорема 5. *Для почти всех t функция $\nu(G, t)$ совпадает с суммой длин правильных в смысле 1° компонент уровня t. При этом длина понимается в обычном смысле.*

Теорема 6. *Вариация $W(F, M)$ как функция B-множества M абсолютно аддитивна.*

13°. Ограниченность плоской вариации $W(F) < W(F, J)$ эквивалентна ограниченности вариации Тонелли.

Теорема 7. *У функции ограниченной плоской вариации почти всюду существует асимптотический полный дифференциал.*

14°. Если $W(F, M)$ как функция множества абсолютно непрерывна, то функция $F(\eta)$ называется абсолютно непрерывной.

Теорема 8. *Если функция $F(\eta)$ абсолютно непрерывна, то $W(F, G) = \iint\limits_G |\operatorname{grad}_A F(\eta)|\, dS$, где $\operatorname{grad}_A F(\eta)$ — асимптотический градиент.*

Теорема 9. *Если у функции $F(\eta)$ существует в каждой точке полный дифференциал и $\iint\limits_J |\operatorname{grad} F(\eta)|\, dS < +\infty$, то функция $F(\eta)$ абсолютно непрерывна.*

15°. Теорема 10. *Если $F(\eta) = F_1(\eta) + F_2(\eta)$, где $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$ — непрерывные функции, то*

$$W(F) \leqslant W(F_1) + W(F_2).$$

16°. Плоская вариация $W(F)$ инвариантна относительно перемены осей координат и вообще движения в плоскости J. Далее, очевидно,

$$W(F + \text{const}) = W(F), \quad W(\text{const}\, F) = |\text{const}|\, W(F).$$

Для плоской вариации имеет место свойство пункта 6°. Наконец, если G — открытое множество и последовательность непрерывных функций $\{F_n(\eta)\}$ равномерно сходится к $F(\eta)$, то

$$W(F, G) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} W(F_n G).$$

17°. Ни ограниченность плоской, ни ограниченность линейной вариации порознь не влечет обязательного существования у функции $F(\eta)$ полного дифференциала. Справедлива, однако, теорема 11.

Теорема 11. *Если у непрерывной функции $F(\eta)$, заданной в квадрате или на двумерной сфере J, плоская и линейная вариации одновременно ограничены, то у $F(\eta)$ почти всюду (в смысле плоской меры Лебега) существует полный дифференциал.*

18°. Результаты 10°—16° переносятся на n-мерный случай с очевидной заменой одномерной меры Хаусдорфа на $n-1$-мерную. Для обобщения теоремы 10 нужно ввести в случае n переменных n различных вариаций — „k-мерных" вариаций функции n переменных и потребовать их одновременной ограниченности.

Математический институт
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Hausdorf, Math. Ann., 79 (1919).