Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

К УСИЛЕНИЮ ТЕОРЕМЫ ФУБИНИ О ПОРЯДКЕ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 IV 1949)

Пусть в числовом многообразии $x^1, x^2, \ldots, x^n$ фундаментальный тензор $g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ определяет некоторое риманово пространство, т. е.

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{1}$$

Известно, что для уравнений

$$\xi_{\alpha,\beta} = u_{\alpha\beta}, \quad u_{\alpha\beta,\gamma} = -\xi_\sigma R^\sigma_{\gamma\alpha\beta}, \tag{2}$$

определяющих группу движений заданного пространства (1), первая серия условий интегрируемости относительно $n^2 + n$ неизвестных функций ξ_α, $\xi_{\alpha,\beta} = u_{\alpha\beta}$ записывается в форме

$$\xi_\sigma (R^\sigma_{\gamma\alpha\beta,\varepsilon} - R^\sigma_{\varepsilon\alpha\beta,\gamma}) + \xi_{\alpha_1,\alpha_2} (\delta^{\alpha_2}_\beta R^{\alpha_1}_{\alpha\gamma\varepsilon} + \delta^{\alpha_1}_\alpha R^{\alpha_2}_{\beta\gamma\varepsilon} + \delta^{\alpha_2}_\varepsilon R^{\alpha_1}_{\gamma\alpha\beta} - \delta^{\alpha_2}_\gamma R^{\alpha_1}_{\varepsilon\alpha\beta}) = 0, \tag{3}$$

где ковариантные производные (дифференцирование ведется относительно $g_{\alpha\beta}$) $\xi_{\alpha,\beta}$ от ковариантных составляющих вектора ξ^α движения связаны уравнениями Киллинга

$$\xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0. \tag{4}$$

Поднимая в уравнениях (3) индекс β и контрактируя его с индексом γ, получим

$$+ \xi_\sigma g^{\beta\gamma} (R^\sigma_{\gamma\alpha\beta,\varepsilon} - R^\sigma_{\varepsilon\alpha\beta,\gamma}) - \xi_{\alpha_1,\alpha_2} (\delta^{\alpha_2}_\alpha R^{\alpha_1}{}_\varepsilon + \delta^{\alpha_2}_\varepsilon R^{\alpha_1}{}_\alpha) = 0, \tag{5}$$

где тензор $R^\alpha_{\cdot\beta}$ означает смешанные составляющие тензора Риччи.

Соотношения (5) и (4) позволяют доказать важный результат в теории групп движений рассматриваемых пространств.

Теорема. *Максимальный порядок полных групп движений римановых пространств, не являющихся пространствами Эйнштейна, равен* $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.

В самом деле, разрешим уравнения (4) относительно $\frac{n(n+1)}{2}$ составляющих $\xi_{\alpha,\beta} = u_{\alpha\beta}$ так, чтобы правые части содержали

$$u_{\alpha_i \alpha_j}, \quad i < j, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \quad \alpha_i \neq \alpha_j. \tag{6}$$

Исключая найденные $\xi_{\alpha,\beta}$ из уравнений (5), получим

$$\xi_\sigma g^{\alpha\beta}(R^\sigma_{\gamma\alpha\beta,\varepsilon} - R^\sigma_{\varepsilon\alpha\beta,\gamma}) + u_{\alpha_i\alpha_j} T^{\alpha_i\alpha_j}_{(\alpha,\varepsilon)} = 0, \tag{7}$$

причем

$$T^{\alpha_i\alpha_j}_{(\alpha\varepsilon)} = 4\delta^{[\alpha_i}_{(\alpha} R^{\alpha_j]}_{\varepsilon)}.$$

Образуем матрицу

$$\left\| T^{\alpha_i\alpha_j}_{(\alpha\varepsilon)} \right\|, \tag{8}$$

в которой индексы $\alpha_i\alpha_j$ фиксируют колонки, $\alpha\varepsilon$ — строчки.

Если ранг ρ матрицы (8) меньше $n-1$, то минор порядка $n-1$, соответствующий строчкам

$$(\alpha_1\alpha_1),\ (\alpha_1\alpha_3),\ (\alpha_1\alpha_4), \ldots, (\alpha_1\alpha_n)$$

и столбцам

$$(\alpha_1\alpha_2),\ (\alpha_2\alpha_3),\ (\alpha_2\alpha_4), \ldots, (\alpha_1\alpha_n),$$

элементы которого

$$T^{\alpha_2\alpha_j}_{(\alpha_1\alpha_i)} = -\delta^j_i R^{\alpha_2}{}_{\alpha_1}, \quad T^{\alpha_2\alpha_j}_{(\alpha_1\alpha_1)} = 0, \quad T^{\alpha_1\alpha_2}_{(\alpha_1\alpha_1)} = 2R^{\alpha_2}{}_{\alpha_1} \quad (i, j \geqslant 3),$$

дает обращение в нуль смешанных составляющих тензора Риччи, когда верхний и нижний индексы различны:

$$R^{\alpha_2}{}_{\alpha_1} = 0. \tag{9}$$

Нетрудно установить, что миноры порядка $n-1$ матрицы (8), отнесенные к столбцам

$$(\alpha_{i_1}\alpha_{j_1}),\ (\alpha_{i_2}\alpha_{j_2}),\ (\alpha_{i_3}\alpha_{j_3}), \ldots, (\alpha_{i_{n-1}}\alpha_{j_{n-1}})$$

и строчкам с теми же парами индексов (число таких миноров равно числу сочетаний из $\frac{n(n-1)}{2}$ по $n-1$), ненулевые элементы которых на основании формул (9) расположены только по главным диагоналям, дают

$$R^1{}_1 = R^2{}_2 = R^3{}_3 = \ldots = R^n{}_n. \tag{10}$$

Обозначая общую величину в равенствах (10) через λ, получим из формул (9) и (10):

$$R_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma} R^\sigma{}_\beta = \lambda g_{\alpha\beta}. \tag{11}$$

Теорема об интегрировании системы (2) и формулы (11) показывают, с одной стороны, что порядок полных групп движений римановых пространств, не являющихся пространствами Эйнштейна, не выше $n^2 + n - \frac{n(n+1)}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, с другой стороны, расслоенные пространства вида $ds^2 = (dx')^2 + d\sigma^2$, где $d\sigma^2$ определяет линейный элемент пространства V_{n-1} ненулевой постоянной кривизны от $n-1$ переменных $x^2, x^3, \ldots, x^n$, имеют группу движений с $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ параметрами, ч. т. д.

В 1903 г. Фубини доказал [1] несуществование римановых пространств, которые обладали бы полной группой движений порядка $\frac{n(n+1)}{2}-1$.

Можно показать, что эта оценка порядка возможных полных групп движений является неточной и что интервал запрещенных порядков в действительности много шире. Мы получим, кроме того, некоторые представления о структуре пространств, исключенных из рассмотрения в доказанной выше теореме.

Теорема. *Порядок полных групп движений римановых пространств, отличных от пространств постоянной кривизны, не больше* $\frac{n(n-1)}{2}+2$.

Действительно, выражая $\xi_{\alpha,\beta}$ в уравнениях (3) через переменные (6), получим

$$\xi_\sigma (R^\sigma_{\gamma\alpha\beta,\varepsilon} - R^\sigma_{\varepsilon\alpha\beta,\gamma}) + u_{\alpha_i\alpha_j} T^{\alpha_i\alpha_j}_{(\alpha\beta\gamma\varepsilon)} = 0, \tag{12}$$

где положено

$$T^{\alpha_i\alpha_j}_{(\alpha\beta\gamma\varepsilon)} = 2\left\{\delta^{[\alpha_i}_\alpha R^{\alpha_j]}_{\beta\gamma\varepsilon} - \delta^{[\alpha_i}_\beta R^{\alpha_j]}_{\alpha\gamma\varepsilon} - \delta^{[\alpha_i}_\gamma R^{\alpha_j]}_{\varepsilon\beta\alpha} + \delta^{[\alpha_i}_\varepsilon R^{\alpha_j]}_{\gamma\beta\alpha}\right\}.$$

Построим матрицу

$$\left\| T^{\alpha_i\alpha_j}_{(\alpha\beta\gamma\varepsilon)} \right\|, \tag{13}$$

индексы $\alpha_i\alpha_j$ определяют колонку матрицы, $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ — строчку.

Определитель системы уравнений

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2),\ (\alpha_1\alpha_3\alpha_1\alpha_2),\ (\alpha_1\alpha_5\alpha_1\alpha_2),\ (\alpha_1\alpha_6\alpha_1\alpha_2),\ \ldots,\ (\alpha_1\alpha_n\alpha_1\alpha_2)$$

относительно переменных

$$(\alpha_2\alpha_4),\ (\alpha_3\alpha_4),\ (\alpha_4\alpha_5),\ (\alpha_4\alpha_6),\ \ldots,\ (\alpha_4\alpha_n),$$

для которого элементы

$$T^{\alpha_4\alpha_i}_{(\alpha_1\alpha_j\alpha_1\alpha_2)} = \delta^i_j R^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2}, \quad T^{\alpha_4\alpha_i}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2)} = T^{\alpha_4\alpha_i}_{(\alpha_1\alpha_3\alpha_1\alpha_2)} = 0,$$

$$T^{\alpha_3\alpha_4}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2)} = 0 \quad (i, j \geqslant 5)$$

дает, если ранг ρ матрицы (13) удовлетворяет неравенству $\rho < n-2$, обращение в нуль составляющих тензора кривизны вида $R^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2}$:

$$R^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = 0. \tag{14}$$

Минор порядка $n-2$ матрицы (13), относящийся к строчкам

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_3),\ (\alpha_1\alpha_2\alpha_2\alpha_3),\ (\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_3),\ (\alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_3),\ \ldots,\ (\alpha_1\alpha_{n-1}\alpha_2\alpha_3)$$

и столбцам

$$(\alpha_1\alpha_4),\ (\alpha_2\alpha_4),\ (\alpha_3\alpha_4),\ \ldots,\ (\alpha_4\alpha_{n-1}),$$

дает, учитывая формулы (14), одно из соотношений

$$R^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0, \tag{15}$$

$$R^{\alpha_4}_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3} - R^{\alpha_4}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = 0, \tag{16}$$

$$R^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + R^{\alpha_4}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = 0, \tag{17}$$

$$R^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} - R^{\alpha_4}_{\alpha_2\alpha_3\alpha_1} = 0. \tag{18}$$

Докажем, что случай (15) всегда имеет место.

Пусть сначала будет справедливой одна из формул (16), (17) или (18). Тогда, заменяя в последнем миноре первую строчку и первый столбец, вторую строчку и второй столбец или третью строчку и третий столбец, соответственно случаям (16), (17) или (18), на строчку $(\alpha_1\alpha_n\alpha_2\alpha_3)$ и столбец $(\alpha_4\alpha_n)$, получим миноры, которые каждый раз в силу тождества

$$R^{\alpha}_{[\beta\gamma\delta]} = 0 \tag{19}$$

будут показывать справедливость формул (15).

Здесь существенным образом мы пользуемся условием того, что при наличии одного из соотношений левые части двух других не обращаются в нуль.

Так как левые части соотношений (16) — (18) линейно зависимы, то нам остается разобрать возможность одновременного существования только двух любых соотношений из (16) — (18). В этом случае, учитывая опять каждый раз тождественные соотношения (19), мы сразу обнаруживаем справедливость формул (15). Следовательно, формула (15) оказывается постоянно справедливой.

Установленные формулы (14) и (15) показывают [2], таким образом, что V_n является проективно-евклидовым пространством, т. е. оно является пространством постоянной кривизны. Это и будет доказывать справедливость теоремы.

Укажем на возможность применения полученного результата к вопросу существования в аффинно-связном пространстве линейных однородных первых интегралов уравнений геодезических.

Пензенский государственный
педагогический институт
им. В. Г. Белинского

Поступило
1 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, 1947, стр. 276.
[2] И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, 1948, II, стр. 197.